Università degli studi di Siena

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea Triennale in

Matematica

Qual è la logica utilizzata dai matematici?

Relatore	Laureanda
Prof. Franco Montagna	Sara Ugolini

Anno Accademico 2010/2011

Indice

Introduzione

La logica matematica ha come obiettivo lo studio dei *ragionamenti*, ossia il modo in cui si producono delle *asserzioni* in conseguenza a certe *premesse.*
Questi ragionamenti devono essere logicamente validi o corretti, ossia ogni interpretazione che soddisfa le assunzioni, deve soddisfare le conclusioni.
Tuttavia non esiste un solo modo di interpretare la realtà e il concetto stesso di verità. Se ne possono dare interpretazioni diverse e non necessariamente conciliabili. Di conseguenza, non poteva esistere una sola logica, ed in effetti ne sono state sviluppate molte, ognuna dando rilevanza ad un aspetto piuttosto che ad un altro.
Il fine di questa tesi è concentrarsi su quale sia la logica utilizzata comunemente in matematica.
Quello che mostreremo è come la risposta sia da ricercare in parte nella logica classica, in parte in quella intuizionista, che sono le due logiche che si propongono naturalmente allo scopo.
Vedremo come queste due logiche nascano da filosofie diverse e come ciò si rifletta già sui concetti di base.

In breve, la logica classica si basa sull'attribuire un "valore di verità" alle formule. In particolare, data una certa interpretazione, $A \wedge B$ è vera quando lo sono entrambe, $A \vee B$ è vera se lo è almeno una delle due, $\neg A$ è vera se è falsa A, mentre in una "struttura" del primo ordine $\exists\, xA$ è vera se $A(a)$ è vera per almeno un elemento del dominio e $\forall\, xA$ è vera se è vera $A(a)$ per ogni a del dominio. Fin qui, non muoveremo grosse critiche, ma ci sono alcune necessarie osservazioni da fare.

Mentre indubbiamente il matematico comune interpreta in questo senso sia la congiunzione che il quantificatore universale, ed anche la negazione di A si identificherà effettivamente con il concetto di "A è falsa", le stesse conclusioni non si possono trarre per la disgiunzione e l'esistenziale.
In certi casi, saremo d'accordo con l'interpretazione classica, ma non sempre. Per dare un'idea, poniamo di essere nei panni di un ispettore di polizia. Per lui, sapere che un colpevole di un certo crimine esiste non è certo equivalente al saperlo realmente indicare, e anche nel caso in cui sia riuscito a restringere il campo a due soli possibili responsabili, non si riterrà soddisfatto.
Allo stesso modo per un matematico avere una dimostrazione, magari per assurdo, dell'esistenza di un determinato oggetto, non consente solitamente di costruirlo.

Comunque sia, le maggiori obiezioni scaturiscono dalla definizione di implicazione, dove si stabilisce che $A \to B$ è falsa solo nel caso in cui A sia vera e B falsa.
In tutti gli altri casi quindi $A \to B$ viene considerata classicamente vera.
I due principi che scaturiscono da questa definizione sono:

A fortiori ossia se B è vero, qualunque sia A l'implicazione risulta vera.
Di conseguenza, anche l'aggiunta di nuove assunzioni non modificherebbe il risultato ottenuto senza di esse.

Ex falso quodlibet Con A falsa , $A \to B$ risulta vera qualunque sia B.

Entrambe risultano antiintuitive. Pensiamo ad esempio all'*a fortiori.* In certi casi un'assunzione in più può cambiare totalmente lo scenario.
Se ad esempio vi dicessero: *"Mi trovavo su un aereo. Mancava il carburante, il motore di sinistra era fuori uso, fuori infuriava la tempesta e il pilota si era sentito male. Ma mi salvai: l'aereo non era ancora decollato."* Senza l'ultima assunzione certamente si trarrebbe una conclusione diversa.
Per quanto riguarda l'*ex falso quodlibet*, citiamo un aneddoto con protagonista Bertrand Russell. Si dice che un tale, contestando questo principio, lo

avesse sfidato a dimostrare la frase *"Se* $2+2=5$ *allora io sono il Papa"*.
La risposta di Russell fu "*Se* $2+2=5$, *allora togliendo 3 ad entrambi i membri, otteniamo* $1=2$. *Ora, Lei e il Papa siete due persone, ma due è uguale a uno, e quindi siete la stessa persona*".

A parte l'acume di Russell, notiamo la limitatezza di queste due regole nel linguaggio naturale. Ad esempio, risulta difficile dimostrare la formula, classicamente vera, "Se non avessero pugnalato Cesare, l'Italia non avrebbe avuto la crisi economica".

Più in generale, nell'interpretazione classica dell'implicazione viene a mancare il rapporto di causa effetto che le si attribuisce tanto nel linguaggio comune quanto in matematica.

Prendiamo ad esempio il Teorema di Fermat, questo afferma che per ogni intero $n > 2$ non esistono soluzioni intere strettamente positive (cioè con $x, y, z > 0$) dell'equazione $x^n + y^n = z^n$ (il teorema fu dimostrato nel 1994 dal matematico britannico Andrew Wiles).

Vediamo come introducendo un assioma apparentemente accettabile si può riuscire a falsificare il teorema. Prendiamo quindi l'assioma "Se il Teorema di Fermat è vero, allora non è vero che se passo la nottata a cercare un controesempio, lo trovo", definendo come "controesempio" una quaterna (n, x, y, z) con n, x, y, z tali da falsificare il teorema.

Probabilmente molti matematici sarebbero disposti ad accettarlo.

Dal nostro assioma, supponendo che il teorema sia vero, deduciamo che non è vero che se passo la notte a cercare un controesempio, lo trovo. Ma in logica classica un'implicazione è falsa solo con premessa vera e conclusione falsa. Quindi con l'ipotesi che il teorema sia vero, deduciamo che:

1. Resto in piedi tutta la notte a cercare un controesempio.
2. Non lo trovo.

Ma io stanotte non resterò affatto in piedi a cercare un controesempio, anzi me ne andrò a letto alla solita ora.

Siamo giunti a una contraddizione, e abbiamo quindi dimostrato che il teo-

rema è falso, il tutto semplicemente andando a dormire.
Si può obiettare che nell'esempio si mescolano asserti matematici con altri asserti extramatematici difficilmente verificabili. È però innegabile che dalla premessa segue, nella logica classica, che se non si resta alzati la notte, il teorema di Fermat è falso.
Abbiamo quindi mostrato quanto l'interpretazione dell'implicazione classica si allontani da quella dei matematici.

Sfruttando il punto di vista della logica intuizionista, siamo in grado di risolvere paradossi analoghi a quelli enunciati.
Nell'intuizionismo, infatti, si parte dall'idea che tutto ciò che si afferma deve poter essere dimostrato.
Il ruolo dell'individuo pensante che mette in atto un processo di verifica è centrale in questa teoria, per la quale il concetto di verità non è un qualcosa di astratto e oggettivo, ma una ricerca costruttiva del soggetto.
E costruttiva sarà quindi l'interpretazione dei connettivi e dei quantificatori, la cui "validità" sarà subordinata alla possibilità o meno di darne prova.
Ad esempio l'implicazione $A \to B$ risulta "vera" se da un'ipotetica prova di A si è in grado di produrre una prova di B.
Il ben noto *tertium non datur*, o principio del terzo escluso, che è fondante nella logica classica, qui non vale necessariamente, in quanto per poter affermare $A \vee \neg A$ si deve poter provare una delle due.
Se l'intuizionismo risulta utile a risolvere alcuni dei problemi evidenziati nella logica classica, non lo si può adottare in toto. Accettando la logica intuizionista infatti, molti teoremi classici non sarebbero più validi, in quanto la prova di molti di essi non è costruttiva. Il nostro punto di vista è che il matematico comune utilizza anche ragionamenti non costruttivi, riuscendo tuttavia a distinguerli da quelli costruttivi. Ed in particolare, mentre per quanto riguarda l'implicazione si utilizza in effetti quella intuizionista, per la negazione il matematico fa una distinzione tra $\neg A$ (A è falsa) e $A \to \perp$ (da A segue contraddizione), che non troviamo nell'intuizionismo.

Siamo quindi di fronte a due approcci drammaticamente differenti, quello classico e quello intuizionista, apparentemente inconciliabili. In realtà vedremo come sia possibile stabilire un “ponte” tra queste due linee di pensiero. Noi in particolare utilizzeremo la logica modale S4, nella quale è possibile interpretare entrambe, e nella quale interpreteremo anche la logica dei matematici LM, che risulterà appunto essere una combinazione delle due logiche presentate.

Studieremo anche i modelli di Kripke, sia per l’intuizionismo che per LM, in cui i mondi saranno interpretati come stati di conoscenza, e la relazione di accessibilità sarà interpretata come la relazione *essere più informativo di.* Dimostreremo in particolare anche la decidibilità di LM nel caso proposizionale.

Infine, vedremo come sia possibile ottenere un sistema di deduzione naturale corretto e completo per LM, passando attraverso la traduzione in S4.

Capitolo 1

Logica classica e logica intuizionista a confronto

Le due concezioni che affronteremo inizialmente sono la logica classica e la logica intuizionista, che per il modo astratto di trattare le proposizioni ed i ragionamenti ben si adattano all'uso in matematica comune.

Come vedremo, i due sistemi differiscono sin dai concetti fondamentali.

La logica classica si propone di dimostrare tutte e sole le formule valide nelle "strutture del primo ordine", o nel caso proposizionale le formule valide rispetto a tutte le valutazioni (tautologie).

L'intuizionista alla nozione di verità preferisce quella di giustificabilità, di capacità di costruire mentalmente l'oggetto che dimostra l'assunto.

1.1 Definizioni di base

Per quanto riguarda la logica proposizionale, l'alfabeto del linguaggio consta di:

- simboli atomici di proposizione A, B, C, ...
- connettivi $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\perp$ che stanno rispettivamente per
  non, e, o, se... allora, simbolo del falso
- simboli ausiliari (,)

Per il linguaggio del primo ordine si aggiungono anche

- un insieme di simboli di predicato A, B, C, ...
  che denotano relazioni fra gli oggetti (non sono simboli di proposizione)
- un insieme di simboli di costante a, b, c ...
  che denotano oggetti specifici
- un insieme infinito di simboli di variabile x, y, z ...
  che denotano oggetti generici
- un insieme di simboli di funzione f, g, h ...
  che denotano funzioni
- quantificatori $\forall$, $\exists$

Per quanto riguarda i simboli le due logiche sembrano concordare, ma la differenza sta nell'interpretazione che si dà ai connettivi ed ai quantificatori, come vedremo.

Per poterne discutere, indichiamo prima le regole che consentono di definire le frasi sintatticamente corrette del linguaggio, ossia le *formule ben formate.*
Per la logica proposizionale l'insieme FBF delle formule ben formate è il più piccolo insieme X tale che:

1. A, B, $\ldots \in$ X per ogni simbolo atomico di proposizione
2. $\perp \in$ X
3. Se $P \in X$ allora $\neg P \in X$
4. Se $P, Q \in X$, allora $(P \wedge Q), (P \vee Q), (P \rightarrow Q) \in X$

Per passare al primo ordine, definiamo prima il concetto di *termine.*
L'insieme TER dei termini di un linguaggio è il minimo insieme X tale che:

1. ogni costante appartiene a X
2. ogni variabile appartiene a X
3. se $t_1 \ldots t_n \in$ X, e f^n è un simbolo di funzione del linguaggio allora $f^n(t_1 \ldots t_n) \in$ X con $n \geq 1$.

L'insieme FBF delle formule al primo ordine è il più piccolo insieme X tale che:

1. valgono le richieste scritte per il linguaggio proposizionale
2. Se $t_1 \ldots t_n$ sono termini, se A^n è un predicato n-ario, allora $A^n(t_1 \ldots t_n) \in X$
3. Se $P \in X$ allora $\forall x\, P,\ \exists x\, P \in X$

1.2 Semantica

I due linguaggi differiscono drammaticamente sull'interpretazione del concetto di verità e su come questo si rifletta sui connettivi.
Mentre nell'approccio classico la verità sembra essere un valore oggettivo che le formule possiedono a prescindere da noi e dall'accesso che possiamo averne, in quello intuizionista la possibilità di esibire una prova di quello che si afferma diventa il carattere dominante.
Il raggiungimento della verità diviene un processo messo in atto dal soggetto pensante, si conosce solo ciò che si riesce a ricostruire.
Si rifiuta ad esempio ogni conclusione derivante dall'assioma di scelta, di un oggetto matematico non basta postularne l'esistenza, lo si deve riuscire a costruire.

1.2.1 Interpretazione classica

Iniziamo dalla logica proposizionale.
Un'"*interpretazione*" classica è una funzione che va da FBF in {0,1}, dove lo 0 indica il falso e l'1 il vero.
In particolare v: FBF → {0,1} è un'interpretazione se:

- $v(\bot) = 0$
- $v(P \wedge Q) = min(v(P), v(Q))$,
  il che significa che la congiunzione di P e Q è vera sse lo sono entrambe
- $v(P \vee Q) = max(v(P), v(Q))$,
  quindi la disgiunzione di P e Q è vera se lo è almeno una delle due
- $v(P \to Q) = 0$ sse $v(P) = 1$ e $v(Q) = 0$
  cioè diventa falsa solo con premessa vera ma conclusione falsa, altrimenti, $v(P \to Q) = 1$
- $v(\neg P) = 1 - v(P)$

È evidente che un'interpretazione di una formula P dipende univocamente dal valore di verità che si attribuisce alle formule atomiche che la compongono, e quindi due interpretazioni che danno alle proposizioni atomiche lo stesso valore, daranno lo stesso valore anche a P.

Per i dettagli sulla semantica del primo ordine, si rimanda al testo "Logica a informatica" di Asperti-Ciabattoni [4].
In breve, un'interpretazione per un linguaggio del primo ordine è una coppia $(\mathcal{A}, \xi)$ dove $\mathcal{A}$ è una *struttura* (ossia una coppia composta dal dominio $\mathcal{D}$ e da una funzione $\mathcal{I}$ che assegna simboli di costante, funzione e predicato a elementi, funzioni e relazioni sul dominio) e ξ è un *ambiente* (funzione che traduce le variabili in elementi del dominio).

Definiamo in particolare l'interpretazione sui quantificatori:

- $v^{(\mathcal{A},\xi^{\mathcal{A}})}(\exists xP) = max\{v^{(\mathcal{A},\xi^{\mathcal{A}}[a/x])}(P)|a \in D\}$
  quindi è falsa solo se non esiste alcun elemento a che verifica $P(a)$
- $v^{(\mathcal{A},\xi^{\mathcal{A}})}(\forall xP) = min\{v^{(\mathcal{A},\xi^{\mathcal{A}}[a/x])}(P)|a \in D\}$
  per essere vera deve verificarsi $P(a)$ per ogni a del dominio

1.2.2 Semantica di Heyting

Per quanto riguarda l'intuizionismo, analizziamo l'interpretazione di Heyting. Come abbiamo detto, l'interpretazione di una formula si basa sulla possibilità o meno di produrne una prova, e questo già a partire dalle formule atomiche.

In generale, per queste non c'è una chiara definizione generale di "validità", ma in alcuni casi andando ad analizzarne i termini la validità risulta evidente. Ad esempio, alcune proposizioni atomiche come $0 = 0$ sono considerate "atomicamente vere", nel senso che le dimostrazioni stesse sarebbero atomiche, e sono quindi considerate *assiomi*.

Altre proposizioni atomiche invece possono essere ridotte a questi assiomi con un calcolo basato sui termini e sulle regole, ad esempio l'ovvia 3*0=1*0 in $\mathcal{N}$, oppure l'espressione $suc(suc(suc(0))) = suc(suc(suc(0)))$ in $\mathcal{N}$ che si può dimostrare iterando tre volte la regola di inferenza $\frac{n=m}{suc(n)=suc(m)}$.

Per quanto riguarda le formule composte:

- $P \wedge Q$ è vera, ossia se ne ha una prova, se si possiede una coppia $< p, q >$ dove p prova P e q prova Q.
- Si ha prova di $P \vee Q$ se si ha una prova p di P o una prova q di Q, o entrambe.
- Una prova di $P \rightarrow Q$ è una procedura che da un'eventuale prova di P porta ad una prova di Q.
- Si ha $\neg P$ se si mostra una procedura che porta da P a $\perp$. [1]
- Una prova di $\exists x\, P(x)$ è una coppia $< a, p >$ dove $a \in D$ (dominio) e p prova $P(a)$.
- Una prova di $\forall x\, P(x)$ è una procedura f che porta ogni elemento $a \in D$ a una dimostrazione $f(a)$ di P(a).

---

[1] Notiamo che $\neg P \equiv P \rightarrow \perp$. Ma $\perp$ non ha prove. Quindi, una prova di $\neg P$ è un metodo che trasforma una prova di P in una prova di $\perp$, che non esiste.
Questo risulta poco convincente.

1.2.3 Concetti fondamentali

Un concetto importante è quello di *conseguenza semantica.*
Ci interessa sapere nello sviluppo di un ragionamento quando è possibile stabilire un legame di conseguenza logica tra un certo insieme di formule (premesse), e una certa formula (conclusione).
Con riferimento alla logica classica, dato Γ un insieme di fbf, e data una formula Q, diremo che questa è *conseguenza semantica* di Γ, scrivendo $\Gamma \models Q$, se e solo se $\forall v \; ((\forall P_i \;\in\; \Gamma, \; v(P_i = 1) \Rightarrow v(Q) = 1)$. Ossia quando ogni interpretazione che soddisfa le formule di Γ soddisfa anche Q.

Una formula si dice *soddisfacibile* se esiste almeno un'interpretazione che la soddisfa, insoddisfacibile altrimenti.

Per la logica classica, abbiamo uno strumento conveniente per rappresentare il valore di verità di una formula composta a partire dalle sue componenti: le cosiddette "*tavole di verità*".
Ogni colonna rappresenta una formula, ogni riga un'interpretazione.
Da sinistra verso destra si compone la formula a partire dalle proposizioni atomiche fino ad arrivare alla formula finale il cui valore di verità viene ottenuto passo passo lungo la tabella.

Ad esempio vediamo la tavola di verità di $A \vee \neg A$:

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
0	1	1
1	0	1

Da queste tabelle è semplice vedere le proprietà delle formule che stiamo considerando, la soddisfacibilità ad esempio coincide con il trovare almeno un 1 nell'ultima colonna.

Le tavole rendono quindi facile dimostrare la *decidibilità* della logica classica proposizionale, ossia che esiste un algoritmo in grado di dirci se una formula è soddisfacibile.
Basta appunto costruire la tabella di dimensione 2^n, con n numero delle proposizioni atomiche, e verificare per quanto riguarda la soddisfacibilità di avere almeno un 1 nella colonna di destra, e per quanto riguarda la tautologicità, di avere tutti 1 in tale colonna.

Una formula come quella dell'esempio è una *tautologia* in questo linguaggio, visto che troviamo solo 1 nell'ultima colonna, il che significa che ogni interpretazione la soddisfa.
Una formula che è tautologia in logica classica può non esserlo affatto in logica intuizionista. E infatti, come vedremo, il rifiuto di questa tautologia in particolare è alla base dell'intuizionismo.

1.2.4 Confronto su connettivi e quantificatori

Già dalle formule atomiche è chiara la differente concezione dei due linguaggi logici.

Nonostante simbolicamente i connettivi siano gli stessi, la differenza semantica risulta in alcuni casi abissale.

Per la congiunzione vale la differenza che si stabilisce tra il dichiarare vera una formula nelle due logiche, ma negli altri connettivi la differenza risulta più marcata.

Implicazione Nella logica classica, valutare l'affermazione $A \to B$ diventa un mero calcolo sui valori di verità di A e B rispettivamente.

L'espressione diventa quindi in tutto e per tutto equivalente a $\neg(A \wedge \neg B)$.

Da questa definizione hanno origine i due principi *a fortiori* (se B è vera essa rimane vera anche in presenza di una nuova ipotesi A) e *ex falso quodlibet* (se A è falsa ne posso concludere B, qualunque sia B).

Per quanto poco intuitivi se interpretati nel linguaggio naturale, questi principi (a fortiori e ex falso quodlibet) sono validi anche nella logica intuizionista, e del resto sono comunemente usati e accettati nella pratica matematica. Va però notato che il concetto di falso nella logica classica è diverso dal concetto di falso nella logica intuizionista. Per un logico classico un enunciato falso è semplicemente un enunciato non vero, mentre per un intuizionista un enunciato falso è un enunciato dal quale segue una contraddizione. In particolare il “terzo escluso”, $A \vee \neg A$, vale nella logica classica, nel senso che per un logico classico A è o vera o falsa, ma non vale nella logica intuizionista. È proprio il “terzo escluso”, come vedremo, che unito all'a fortiori e all'ex falso quodlibet produce molti enunciati classicamente validi che risultano però del tutto antiintuitivi. Ad esempio l'identificazione fra $A \to B$ e $\neg(A \wedge \neg B)$ si dimostra usando tutti e tre i principi (ex falso quodlibet, a fortiori, tertium non datur) e quindi, utilizzando anche il tertium non datur, non è accettabile intuizionisticamente.

Negazione Il differente modo di leggere l'implicazione si riflette anche nel concetto di negazione, visto che nell'intuizionismo la negazione di A si ottiene dimostrando l'assurdo a partire da A.

Per un logico classico, la definizione è meno stringente, $\neg A$ significa semplicemente che A non è vera.

Per il logico intuizionista non basta l'assenza di verità in A, serve dimostrare costruttivamente una contraddizione.

Nella logica classica, quindi, c'è una completa equivalenza tra A e $\neg\neg A$, che non si trova nell'intuizionismo.

Anche lì tuttavia vale $A \to \neg\neg A$, infatti supponiamo di avere una prova a di A, quello che vorremmo è ottenere da una prova b di $\neg A$ l'assurdo per poter concludere $\neg\neg A$. Ma basterà applicare b ed a per ottenere una contraddizione, quindi $\neg\neg A$ è dimostrato.

Disgiunzione Nella logica classica è sufficiente escludere che le due formule siano entrambe false per soddisfare l'affermazione $A \vee B$, che quindi equivale in tutto e per tutto a $\neg(\neg A \ \wedge \ \neg B)$.

Nell'intuizionismo invece serve avere una prova di almeno una delle due proposizioni, e quindi la prima formula implica la seconda ma non viceversa.

In particolare abbiamo dimostrato con le tavole di verità che $A \vee \neg A$, il *principio del terzo escluso* o *tertium non datur*, è una tautologia per la logica classica, mentre il suo rifiuto è alla base dell'intuizionismo.

Ci sono circostanze in cui questo principio risulta accettabile, ad esempio saremo d'accordo nel dire che ad una determinata estrazione del lotto o avete vinto o non avete vinto (nonostante probabilmente vi interesserebbe sapere quale delle due sia vera), ma se vi chiedessero se siete d'accordo nello schierarvi a favore o contro un determinato schieramento in una rissa potreste trovare conveniente avere una scelta intermedia, o almeno poter scegliere di non schierarvi affatto.

Vediamo come, anche non uscendo dai confini della matematica, questo principio unito in particolare alla regola “a fortiori” e a “ex falso quodlibet” genera conseguenze antiintuitive.

Esempio 1.2.1. Dato un triangolo arbitrario T, poniamo la frase F: *O se T è isoscele allora non è isoscele, oppure, se T non è isoscele allora è isoscele.* Formalizzato, equivale ad un'espressione del tipo $(A \to \neg A) \vee (\neg A \to A)$ che è perfettamente dimostrabile in logica classica, sebbene nessun matematico sarebbe disposto a considerare vera la nostra frase.
Essendo una disgiunzione di due implicazioni, per dimostrare F basta dimostrare che almeno una delle due è vera:

- Per il tertium non datur, o T è isoscele, oppure non lo è.
- Se T è isoscele, per l'a fortiori la frase “se T non è isoscele allora T è isoscele” è vera perché aggiungere l'informazione “T non è isoscele” non cambia il valore di verità dell'implicazione; essendo quindi vera la seconda implicazione, anche F è vera.
- Allo stesso modo se T non è isoscele, resta non isoscele con l'aggiunta di qualsiasi ipotesi, compresa quella che lo sia. È vera la prima implicazione e quindi anche F.

Dal punto di vista intuitivo la frase non è vera perché nessuna delle due implicazioni è in realtà provabile.

Vediamo quindi con chiarezza i limiti della logica classica nell'ambito non solo del linguaggio comune, ma anche del suo utilizzo in matematica.

Per quanto riguarda il linguaggio del primo ordine, anche i quantificatori assumono una differente accezione.

Quantificatore universale La differenza risiede nel fatto che per l'intuizionista l'unico modo per affermare $\forall x\, A$ è la possibilità di produrre una prova di $A(a)$ a partire da un generico elemento a del dominio.

Quantificatore esistenziale Essendo $\exists$ interpretabile come un'infinita disgiunzione, vale in linea di principio il concetto espresso per questo connettivo.

La differenza, quindi, sta nel poter esibire un elemento del dominio per cui la proprietà in oggetto valga. Nella logica classica, è sufficiente dimostrare anche in modo indiretto (per assurdo) che un tale elemento esista, senza indicarlo.

In generale, in matematica possiamo utilizzare entrambi questi due punti di vista a seconda del ragionamento che stiamo portando avanti.

1.3 Deduzione naturale

Il lavoro di un matematico in generale consiste nel creare dimostrazioni di ciò che afferma, ci interessa quindi un sistema di calcolo logico che formalizzi le dimostrazioni in base alle regole imposte dal linguaggio.
Il sistema della deduzione naturale è il più comune sistema di calcolo, in quanto riflette i tipi di ragionamento comunemente usati in matematica. Esso permette di sviluppare dimostrazioni ad albero, fatte di sequenze di passi elementari riflettenti le regole di conseguenza logica, che portano dalle premesse alle conclusioni.

Pur essendo "naturale" questo sistema ha tuttavia il difetto di essere molto "complicato", visto che le regole non agiscono solo sulla conclusione, ma talvolta anche sulle premesse.

Vedremo che la maggior parte delle regole della deduzione naturale sono comuni alla logica classica e a quella intuizionista, ma la loro interpretazione nelle due logiche è profondamente diversa.

Vediamo prima le regole comuni ad entrambe le logiche.

Le linee orizzontali stanno a indicare che se si hanno a disposizione le formule al di sopra della linea si può concludere con le formule al di sotto.
Le linee verticali significano "avere un albero di derivazione di ciò che sta sotto a partire da ciò che sta sopra".
Le etichette numeriche che ricorrono negli alberi indicano quelle formule che non è necessario avere tra le assunzioni ma servono solo per quel singolo passaggio, e quindi possono essere "scaricate" al momento in cui viene indicato, ossia quando il loro numero viene richiamato a fianco delle linee orizzontali.

- Introduzione ed eliminazione della congiunzione

$$\frac{P \qquad Q}{P \wedge Q}\wedge I$$

$$\frac{P \wedge Q}{P}\wedge E \qquad \frac{P \wedge Q}{Q}\wedge E$$

  Risultano entrambe ovvie dalle definizioni, per entrambe le logiche. L'introduzione in logica classica significa che la congiunzione di P e Q è vera se sono vere entrambe, in logica intuizionista significa che per provare $P \wedge Q$ devo provare sia P che Q.
  Per l'eliminazione vuol dire che se è vera la congiunzione (o ne ho una prova) allora posso concludere che una delle due è vera (ne ho prova).

- Introduzione ed eliminazione della disgiunzione

$$\frac{P}{P \vee Q}\vee I \qquad \frac{Q}{P \vee Q}\vee I$$

  Per entrambe le logiche riflette l'interpretazione semantica della disgiunzione, cioè avere una prova di P o Q significa proprio poter disporre o di una prova di P o una prova di Q, mentre perché sia vera $P \vee Q$ basta che sia vera almeno una delle due.

$$\dfrac{P \vee Q \qquad \begin{matrix}[P]^1\\ |\\ \mathrm{R}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[Q]^2\\ |\\ \mathrm{R}\end{matrix}}{\mathrm{R}}\ \vee E(1)(2)$$

L'interpretazione è diversa nelle due logiche.
Per la logica classica significa che basta sapere che vale o P o Q, non importa quale delle due, e che da ciascuna delle due potrei dedurre R, per dedurre R da $P \vee Q$.
Per la logica intuizionista significa che se è possibile avere un metodo p che da una prova di P dimostra R, ed un metodo q che da una prova di Q dimostra R, ed inoltre si possiede una prova s di P o Q, allora utilizzando s insieme a p o q a seconda di quale delle due formule sia stata provata, si ottiene una prova di R.

- Introduzione dell'implicazione

$$\dfrac{\begin{matrix}[P]^1\\ |\\ \mathrm{Q}\end{matrix}}{P \to Q}\ \to I(1)$$

Anche qui la regola è la stessa, ma si tengano presenti le due differenti interpretazioni, per l'intuizionismo significa che provare $P \to Q$ equivale ad avere un metodo che permette di poter costruire una prova di Q a partire da una eventuale prova di P.
Per la logica classica è profondamente diverso, significa che se supponendo vera P, ho che Q è vera, allora risulta vera l'implicazione, anche senza una relazione diretta tra le due.

- Eliminazione dell'implicazione ("modus ponens")

  $$\dfrac{P \qquad P \to Q}{Q}\,{\scriptstyle \to E}$$

  Per la logica intuizionista: se ho una prova di P e un metodo che da una prova di P mi conduce a una prova di Q, allora ho ottenuto una prova di Q, applicando il metodo alla prova di P. Per la logica classica: se P è vera e lo è anche $P \to Q$ allora anche Q è vera.

- Ex falso quodlibet

  $$\dfrac{\bot}{P}\,{\scriptstyle \bot}$$

  Nell'intuizionismo, assume una sfumatura differente in quanto significa che se si è potuto dimostrare un assurdo, da questo si può concludere che si può provare qualsiasi P, mentre nella logica classica significa che se un enunciato falso fosse vero, allora tutti gli enunciati sarebbero veri.

- Introduzione ed eliminazione della negazione

  $$\dfrac{\begin{array}{c}[P]^1 \\ | \\ \bot\end{array}}{\neg P}\,{\scriptstyle \neg I(1)}$$

  Che intuizionisticamente è la definizione della negazione, mentre classicamente significa che se da P posso dedurre l'assurdo allora P deve essere falsa.

$$\dfrac{P \qquad \neg P}{\bot}\,{\scriptstyle \neg E}$$

Vale ovviamente per entrambi.

Una regola che invece vale nella logica classica ma non in quella intuizionista è la seguente:

- Reductio ad absurdum

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg P]^1\\ |\\ \bot\end{array}}{P}\;{\scriptstyle RAA(1)}$$

Che non vale nell'intuizionismo, dove infatti non si ha $\neg\neg P \to P$, banalmente dimostrabile introducendo questa regola.
Nella logica classica quindi per dimostrare P basta dedurre un assurdo da $\neg P$.
Gli intuizionisti per affermare P ne vogliono invece una dimostrazione diretta.
La differenza si vede nelle dimostrazioni di disgiunzioni ed esistenziali.
Ad esempio nella logica classica utilizzando la RAA posso dedurre $A \vee B$ da $\neg(\neg A \wedge \neg B)$, mentre nell'intuizionismo per dedurre $A \vee B$ devo o dedurre A o dedurre B, ma nessuno dei due è deducibile da $\neg(\neg A \wedge \neg B)$.

Per quanto riguarda il linguaggio del primo ordine, si aggiungono alle precedenti le seguenti regole:

- Introduzione ed eliminazione del quantificatore universale

$$\frac{A[y/x]}{\forall x A}{\scriptstyle \forall I}$$

  In entrambe le logiche, ma con le note differenti sfumature, significa che si può concludere con $\forall x A$ se si è riusciti a dimostrare A per un y generico, con la condizione che questa non compaia libera nelle assunzioni non scaricate da cui si è dedotta A; il che significa che y non deve aver perso la sua genericità soddisfacendo alle proprietà richieste da un qualche predicato utilizzato in precedenza.

$$\frac{\forall x A}{A[t/x]}{\scriptstyle \forall E}$$

  Se A vale per ogni x (o se ho una prova che valga per ogni x), posso concludere che A vale (o che ho una prova di A) per un termine arbitrario del linguaggio in esame.

- Introduzione ed eliminazione del quantificatore esistenziale

$$\frac{A[t/x]}{\exists x\, A}{\scriptstyle \exists I}$$

  In logica classica se sappiamo che per un certo termine t vale A, possiamo chiaramente concludere che esiste un x che verifica A.
  In logica intuizionista, significa che se so produrre quel determinato t e una prova di $A[t/x]$ allora posso dedurre $\exists x\, A$.

$$\dfrac{\exists x\, A \qquad \begin{array}{c}\mathrm{A[y/x]}\\ | \\ \mathrm{B}\end{array}}{\mathrm{B}}\ \exists E$$

> Questa regola riproduce la stessa idea che sta sotto all'eliminazione della disgiunzione. Se da una prova di $A(x/y)$, per un y generico (e che quindi non deve comparire in altre assunzioni da cui B dipende) posso dedurre B, allora da una prova di $A(z)$ per un opportuno z deduco B (applicando il metodo con z al posto di y).
> In senso classico, non c'è alcun interesse a sapere quale sia il termine per cui A valga effettivamente, mentre in senso intuizionista si deve poterlo mostrare, e da una prova di A(a) ricavare una prova di C.

Il concetto di albero di deduzione di A da un insieme Γ di formule è definito per induzione sul numero di regole (si consulti il testo Logica a informatica di Asperti - Ciabattoni [4]).

Quindi se attraverso queste regole si costruisce un albero che dimostri una certa formula Q, e le cui assunzioni non scaricate siano tutte incluse in un certo insieme Γ, possiamo dire che Q è *deducibile* da Γ, $\Gamma \vdash Q$.
In particolare, un insieme di formule Γ si dice *consistente* se da esso non è possibile dedurre l'assurdo, $\Gamma \nvdash \bot$.

1.4 Teorema di completezza

Perché questi due sistemi siano "utilizzabili" in matematica, è necessario che il piano sintattico e quello semantico concordino, e che quindi i concetti di deducibilità e conseguenza logica siano in stretto rapporto.
In particolare è necessario che ogni formula deducibile da un insieme Γ di premesse in un sistema formale, sia conseguenza semantica di Γ (se $\Gamma = \emptyset$ sia una tautologia).
Questo garantisce che il sistema sia *corretto*, che non permetta cioè di inferire formule semanticamente non valide.
Tutto questo ci è garantito dal teorema di correttezza, per il quale
se $\Gamma \vdash P \Rightarrow \Gamma \models P$.

Ma è desiderabile dimostrare qualcosa in più, ossia che le logiche descritte siano anche *complete*, ossia se $\Gamma \models A$ allora A deve essere deducibile da Γ.

Nel caso classico $\models$ è dato dalla semantica di Tarski, e per la dimostrazione del teorema di completezza si può consultare un qualunque testo di logica, ad esempio il già citato Logica a informatica [4].

Per la logica intuizionista il problema è più complesso. Infatti il concetto di verità coincide con quello di dimostrabilità, e completezza e correttezza diventerebbero: "A è dimostrabile sse è dimostrabile".
Per questo introdurremo anche un'altra semantica, meno illuminante di quella delle dimostrazioni ma matematicamente efficace, ossia quella dei modelli di Kripke.

Capitolo 2

Logica modale

Come abbiamo visto, logica classica e logica intuizionista sono profondamente diverse tra loro.
Tuttavia sarebbe utile per un intuizionista poter simulare il ragionamento di un logico classico e viceversa.
Stabilendo un legame tra i due criteri di verità si renderebbe possibile in ciascuna logica formalizzare quello che è il punto di vista dell'altra.

Mentre la logica classica può essere tradotta con un semplice accorgimento in quella intuizionista, per il viceversa occorre introdurre una "modalità", un simbolo che ci indichi la differente interpretazione che si attribuisce a determinate formule.
Per questo introduciamo la logica modale, che nasce proprio dall'esigenza di utilizzare nel linguaggio modalità diverse, che in genere sono i concetti di necessità, indicato col simbolo $\Box$, e possibilità, con $\Diamond$.

Inizialmente vediamo come sia possibile interpretare la logica classica in quella intuizionista.

2.1 Interpretazione della logica classica in quella intuizionista

Gödel sviluppa queste interpretazioni nel 1933, in *Zur intuitionistichen Arithmetik und Zahlentheorie* e in *Eine Interpretation des intuitionistichen Aussagenkalküls.*
Stabiliamo che $\wedge^c, \vee^c, \rightarrow^c, \neg^i, \forall^c, \exists^c$ siano i simboli del linguaggio classico, e $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$ quelli intuizionisti.

Questa traduzione si può ottenere aggiungendo la modalità $\Diamond$ al linguaggio intuizionista. Diamo a $\Diamond A$ il significato di "A è vera in senso classico", o anche "A è potenzialmente vera" .
Definiamo la traduzione * :

- $P^* \equiv \Diamond P$ con P formula atomica
- $(A \wedge^c B)^* \equiv A^* \wedge B^*$
- $(A \vee^c B)^* \equiv \Diamond(A^* \vee B^*)$
- $(A \rightarrow^c B)^* \equiv A^* \rightarrow B^*$
- $(\exists^c x\, A(x))^* \equiv \Diamond\exists x\, A^*(x)$
- $(\forall^c x\, A(x))^* \equiv \forall x\, A^*(x)$

La traduzione si rivela semplice perché Gödel dimostra che se si prende $\Diamond = \neg\neg$, si ha $\underset{C}{\vdash} \Phi$ sse $\underset{I}{\vdash} \Phi^*$.
Ossia, non serve una modalità esterna al linguaggio intuizionista per tradurre le formule classiche.

La stessa cosa non accadrà per la traduzione in senso contrario, ossia per tradurre la logica intuizionista in quella classica servirà una modalità non definibile all'interno della logica classica.
A tal fine, introduciamo la logica modale S4.

2.2 La logica modale S4

2.2.1 Assiomi

Il linguaggio di S4 è caratterizzato dai seguenti assiomi:

1. Assiomi della logica classica (alla Hilbert-Frege)
2. $\Box A \to A$
3. $\Box A \to \Box\Box A$
4. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Come regole si hanno inoltre il Modus Ponens e la regola di Necessitazione:

$$\frac{A}{\Box A}$$

(con la condizione che A sia dimostrabile senza assunzioni).

Per interpretare semanticamente la logica S4, utilizziamo i modelli di Kripke.

2.2.2 Semantica di Kripke

Un modello di Kripke è una terna $< W, R, \Vdash >$, dove:
W è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti *nodi* o *mondi*, pensati come stati di conoscenza,
R è una relazione binaria detta di *accessibilità* su W,
$\Vdash$, la relazione di *soddisfazione* o *forcing*, è una relazione tra nodi e formule tale che:

- $w \nVdash \perp$
- $w \Vdash \neg A$ sse $w \nVdash A$
- $w \Vdash A \wedge B$ sse $w \Vdash A \, e \, w \Vdash B$
- $w \Vdash A \vee B$ sse $w \Vdash A \, o \, w \Vdash B$
- $w \Vdash A \rightarrow B$ sse $w \nVdash A$ o $w \Vdash B$
- $w \Vdash \Box A$ sse $u \Vdash A$ per ogni u tale che wRu
  Cioè in w è vera $\Box\alpha$ sse in tutti i mondi a cui posso accedere da w è vera α.

Una formula A è valida in un modello di Kripke se $w \Vdash A$, $\forall \, w \in W$.
$< W, R >$ si dice struttura di Kripke.
A ciascun mondo x si associa un insieme di formule F_x vere nel mondo considerato. La modalità $\Box$ introdotta, solitamente si interpreta come "è necessario", ma, almeno quando andremo ad interpretare l'intuizionismo, è bene pensarla come "è dimostrabile".

Gli assiomi 1 e 4 di S4 sono validi per qualunque relazione R. In genere, a seconda delle proprietà di R saranno valide certe formule piuttosto che altre.

Gli assiomi di S4 sono validi in tutti i modelli di Kripke in cui R è un preordine (ossia riflessiva e transitiva) che indicheremo con $\preceq$.
Dimostriamo quindi che, se R è un preordine, allora:

1. se $w \Vdash \Box A$ allora $w \Vdash A$

2. se $w \Vdash \Box A$ allora $w \Vdash \Box\Box A$

3. $w \Vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Dimostrazione. 1. $w \Vdash \Box A \to w \Vdash A$ segue dalla riflessività.

   Infatti se $w \Vdash \Box A$ allora, visto che $w \preceq w, w \Vdash A$. [1]

2. $w \Vdash \Box A \to w \Vdash \Box\Box A$ segue dalla condizione di transitività.

   Supponiamo che $u \Vdash \Box A$.
   Fisso v : $u \preceq v$. $\forall w$ tale che $v \preceq w$ per la transitività vale $u \preceq w$.
   Allora $\forall w$ tale che $v \preceq w$, $w \Vdash A$. Quindi $v \Vdash \Box A$. Il che succede comunque io prenda v : $u \preceq v$. Ma allora $u \Vdash \Box\Box A$. [2]

3. Se $w \Vdash \Box(A \to B)$ allora per ogni z, se $w \preceq z$ allora $z \Vdash A \to B$.
   Supponiamo ora che $w \Vdash \Box A$. Allora per ogni z, se $w \preceq z$, $z \Vdash A$. Ma allora se $w \preceq z$, $z \Vdash A$ e $z \Vdash A \to B$ e quindi $z \Vdash B$. In conclusione: se $w \preceq z$, $z \Vdash B$, ossia $w \Vdash \Box B$. ☐

---

[1] Notiamo che in effetti si può vedere anche il viceversa, ossia che dall'assioma segue la riflessività.
Fissiamo un certo $w \in W$ e stabiliamo che una variabile proposizionale p è soddisfatta in u sse $w \preceq u$.
Allora $w \Vdash \Box p$ quindi per (2) $w \Vdash p$ e quindi $w \preceq w$ dalla definizione di $\Vdash$.

[2] Viceversa vediamo come l'assioma implichi la transitività.
Come prima prendiamo un certo $w \in W$ e stabiliamo che p è soddisfatta in u sse $w \preceq u$.
Allora $w \Vdash \Box p$. Per (3) quindi $w \Vdash \Box\Box p$.
Di conseguenza con $w \preceq u$, $u \Vdash \Box p$.
Allora $\forall v : u \preceq v$, $v \Vdash p$. Il che significa che $w \preceq v$.

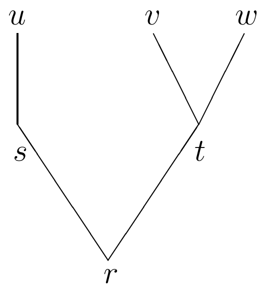
Passiamo alla logica del primo ordine.
La semantica cambia. Ad ogni nodo u è associata una struttura di dominio D_u nella quale sono interpretati i predicati, le funzioni e le costanti del linguaggio.

Si aggiungono le seguenti regole:

- $w \Vdash \exists x\, A$ sse esiste un a $\in D_w$ tale che $w \Vdash A(a)$
- $w \Vdash \forall x\, A$ sse per ogni $a \in D_w,\ w \Vdash A(a)$

Questa è in generale la struttura e la semantica della logica S4.
Supponiamo i domini crescenti, cioè, se $w \preceq w'$, allora $D_w \preceq D_{w'}$.

Esempio 2.2.1. Supponiamo che W sia composto dai nodi o mondi $\{r, s, t, u, v, w\}$. Graficamente, possiamo visualizzare i rapporti tra i mondi con un albero:



Nella figura, ad esempio, si ha $r \preceq s \preceq u$.

Vediamo ora come sia possibile interpretare l'intuizionismo in S4.

2.3 Interpretazione dell'intuizionismo in S4

Un modello di Kripke (proposizionale) per l'intuizionismo si definisce come una terna $< X, \preceq, \Vdash >$, dove X è un insieme diverso dal vuoto (insieme dei mondi possibili o degli stati di conoscenza), e $\preceq$ è una relazione di ordine parziale fra mondi e proposizioni che gode delle seguenti proprietà:

1. $w \nVdash \perp$ e se $w \Vdash A$ con A variabile proposizionale e $w \preceq u$, allora $u \Vdash A$ (condizione di persistenza)
2. $w \Vdash A \wedge B$ sse $w \Vdash A \; e \; w \Vdash B$
3. $w \Vdash A \vee B$ sse $w \Vdash A \; o \; w \Vdash B$
4. $w \Vdash A \rightarrow B$ sse $\forall u \geq w, \; u \Vdash A$ implica $u \Vdash B$
   Un modello di Kripke al primo ordine è ottenuto aggiungendo per ogni mondo $w \in X$ un dominio $D_w \neq \emptyset$ in modo che se $w \preceq w'$ allora $D_w \subseteq D_{w'}$ e aggiungendo alle clausole precedenti le seguenti:
5. $w \Vdash \exists x \, A$ sse esiste un a $\in D_w$ tale che $w \Vdash A(a/x)$
6. $w \Vdash \forall x \, A$ sse per ogni u tale che $w \leq u$ e per ogni $a \in D_u$ $u \Vdash A(a/x)$.

La logica intuizionista si interpreta allora in S4, nel caso del primo ordine, come segue:

1. $P^* \equiv \Box P$ per P atomica
2. $\perp^* \equiv \; \Box \perp \equiv \perp$
3. $(P \wedge Q)^* \equiv P^* \wedge^c Q^*$
4. $(P \vee Q)^* \equiv P^* \vee^c Q^*$
5. $(P \rightarrow Q)^* \equiv \Box(P^* \rightarrow^c Q^*)$
   $\big($e quindi $(\neg P)^* \equiv \Box\neg^c(P^*)\big)$

6. $(\exists\, x\ P)^* \equiv \exists^c\, x\ P^*$

7. $(\forall\, x\ P)^* \equiv \Box\, (\forall^c\, x\ P^*)$

È possibile dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2.3.1. *Per ogni formula* Φ *della logica intuizionista, si ha:*
$I \vdash \Phi$ *sse* $S4 \vdash \Phi^*$

Si noti che i modelli di Kripke per l'intuizionismo altro non sono che le interpretazioni dell'intuizionismo in S4 tramite la *.
Infatti:

- se P è atomica, $P^* = \Box P$ e quindi, siccome $\Box P$ si "conserva dal basso all'alto", avremo che per P atomica, se $w \Vdash P$ e $w \preceq u$, allora $w \Vdash P$.
- $w \Vdash (A \wedge B)^*$ sse $w \Vdash A^*$ e $w \Vdash B^*$ sse $w \Vdash A$ e $w \Vdash B$
- $w \Vdash (A \vee B)^*$ sse $w \Vdash A^*$ o $w \Vdash B^*$ sse $w \Vdash A$ o $w \Vdash B$
- $w \Vdash (A \to B)^*$ sse $w \Vdash \Box(A^* \to^c B^*)$ sse per ogni u, se $w \preceq u$ e $u \Vdash A^*$ allora $u \Vdash B^*$ sse per ogni u, se $w \preceq u$ e $u \Vdash A$ allora $u \Vdash B$
- $w \nVdash \bot$
- $w \Vdash (\exists\, x\ A)^*$ sse $w \Vdash \exists^c\, x\ A^*$ sse esiste $a \in D_w\ :\ w \Vdash A(a)$
- $w \Vdash (\forall\, x\ A)^*$ sse $w \Vdash \Box\, (\forall^c\, x\ A^*)$ sse per ogni u, se $w \preceq u$ e $a \in D_u$, allora $u \Vdash A^*(a)$ sse per ogni u, se $w \preceq u$ e $a \in D_u$, allora $u \Vdash A(a)$

Teorema 2.3.2. *Per ogni formula Φ dell'intuizionismo, se $w \Vdash \Phi$ e $w \preceq u$, allora $u \Vdash \Phi$.*

Dimostrazione. Supponiamo $w \preceq u$, e dimostriamo per induzione sulla formula Φ che se $w \Vdash \Phi$ allora $u \Vdash \Phi$:

- Se $w \Vdash p$ allora $u \Vdash p$ con p variabile proposizionale (per la persistenza)
- Se $w \Vdash A \wedge B$ allora $w \Vdash A$ e $w \Vdash B$, allora (per ipotesi induttiva) $u \Vdash A$ e $u \Vdash B$ e quindi $u \Vdash A \wedge B$
- Se $w \Vdash A \vee B$ allora $w \Vdash A$ o $w \Vdash B$, allora (per ipotesi induttiva) $u \Vdash A$ o $u \Vdash B$ e quindi $u \Vdash A \vee B$
- Se $w \Vdash (A \rightarrow B)$ allora per ogni x, se $w \preceq x$ e $x \Vdash A$ allora $x \Vdash B$. Ma allora, per ogni $z \succeq u$, visto che per transitività sarà anche $z \succeq w$, vale che se $z \Vdash A$ allora $z \Vdash B$. Quindi anche $u \Vdash (A \rightarrow B)$
- Se $w \Vdash (\exists x\ A)$ allora esiste $a \in D_w \ : \ w \Vdash A(a)$. Ma, essendo i domini crescenti, $a \in D_u$. E per ipotesi induttiva $u \Vdash A(a)$. Quindi $u \Vdash (\exists x\ A)$
- Se $w \Vdash (\forall x\ A)$ allora per ogni x, se $w \preceq x$ e $a \in D_x$, allora $x \Vdash A(a)$. Ma se $A(a)$ vale per ogni $x \succeq w$, per la transitività varrà anche per gli $x \succeq u$, visto che $w \preceq u$. Quindi, $u \Vdash (\forall x\ A)$ □

Teorema 2.3.3. *L'assioma:*

$$\forall x\,(\varphi(x) \vee \psi) \equiv (\forall x\,\varphi(x)) \vee \psi \quad \textit{(con } x \textit{ non libera in } \psi\textit{)}$$

vale in un modello sse il modello è "a domini costanti", cioè per ogni u, w se $w \preceq u$ allora $D_u = D_w$.

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Dato un nodo α, supponiamo che $\alpha \Vdash \forall x\,(\varphi(x) \vee \psi)$.

Questo, dalla definizione, significa che $\forall\ \beta \succeq \alpha$ (dove $\succeq$ è definito in modo ovvio come: $a \succeq b$ sse $b \preceq a$) e $\forall\ b \in D_\beta$ si ha che $\beta \Vdash \varphi(b) \vee \psi$.

Distinguiamo due casi.

- $\alpha \Vdash \psi$.
  Allora $\alpha \Vdash \psi \vee \forall\, x\varphi(x)$.
- $\alpha \nVdash \psi$
  Dall'ipotesi per ogni $a \in D_\alpha$ si ha $\alpha \Vdash \varphi(a)$.
  Ma i domini sono costanti, quindi comunque preso $\beta \succeq \alpha$ si ha che $\forall a \in D_\beta$ (visto che $D_\beta = D_\alpha$) $\beta \Vdash \varphi(a)$ (usando il fatto che il forcing si "conserva dal basso verso l'alto").
  Quindi $\alpha \Vdash \forall\, x\varphi(x)$, ma allora $\alpha \Vdash (\forall x\,\varphi(x)) \vee \psi$.

$\Leftarrow$ Dato un nodo α, supponiamo che $\alpha \Vdash (\forall x\,\varphi(x)) \vee \psi$.

Distinguiamo due casi.

- $\alpha \Vdash \forall x\,\varphi(x)$.
  Allora per ogni $\beta \succeq \alpha$, e per ogni $b \in D_\beta$ si ha $\beta \Vdash \varphi(b)$.
  Quindi $\beta \Vdash \varphi(b) \vee \psi$, comunque si prenda $\beta \succeq \alpha$.
  Ma allora $\alpha \Vdash \forall x\,(\varphi(x) \vee \psi)$.
- $\alpha \Vdash \psi$.
  Per la persistenza comunque preso $\beta \succeq \alpha$, $\beta \Vdash \psi$.
  Quindi $\beta \Vdash \psi \vee \varphi(b)$ e questo $\forall b\ \in D_\beta$.
  Ma allora $\alpha \Vdash \forall x\,(\varphi(x) \vee \psi)$.

Nota: L'assunzione dei domini costanti serve solo nella dimostrazione della prima implicazione, l'altra vale sempre. □

Controesempio *Se i domini non sono costanti, l'assioma non vale necessariamente. Ossia: esiste un modello a domini non costanti in cui l'assioma non vale.*

Dimostrazione. Consideriamo che la nostra struttura sia fatta da due nodi, α e β, tali che $\alpha \preceq \beta$.
Supponiamo che $\alpha \nVdash \psi$, ma che invece $\beta \Vdash \psi$, con ψ variabile proposizionale.
Consideriamo $\varphi(x) = P(x)$ con P predicato.
I domini sono crescenti, quindi si può considerare $D_\alpha \subsetneq D_\beta$. Supponiamo che $\alpha, \beta \Vdash P(a)$, $\forall a \in D_\alpha$, ma che esista un $b \in D_\beta \backslash D_\alpha$ tale che $\beta \nVdash P(b)$.

Quindi sia in α che in β vale $\forall x\, (\varphi(x) \vee \psi)$.
Infatti $\beta \Vdash \psi$, quindi $\beta \Vdash \psi \vee \varphi(b)$ $\forall b \in D_\beta$. Essendo l'unico nodo sopra ad α, in α vale $\forall x\, (\varphi(x) \vee \psi)$.
Ma $\alpha \nVdash \forall x\, \varphi(x) \vee \psi$.
Infatti $\alpha \nVdash \psi$ e $\alpha \nVdash \forall x \varphi(x)$ visto che non è vero che in ogni $\beta \succeq \alpha$ vale $\varphi(b)$ per ogni $b \in D_\beta$. ☐

2.4 Decidibilità

Il frammento di S4 nel linguaggio proposizionale è decidibile, in quanto tale logica ha la proprietà del modello finito.
Infatti se una logica è finitamente assiomatizzabile e ha la proprietà del modello finito, allora è decidibile.
Si dice che questa proprietà vale se per ogni formula consistente c'è un modello finito che la soddisfa (o, equivalentemente, ogni non-teorema Φ è falsificabile in un modello finito).

Teorema 2.4.1. *S4 ha la proprietà del modello finito.*

Dimostrazione. Sia ϕ una formula proposizionale di S4 tale che $S4 \nvdash \phi$.
Vogliamo costruire un modello finito in cui ϕ non è valida.
Definiamo $S = \{\psi, \neg\psi, \Box\psi, \neg\Box\psi : \psi$ sottoformula di $\phi\}$.
Osserviamo che S è un insieme finito.
Definiamo inoltre $X = \{x : x \subseteq S$, x consistente massimale di S4$\}$.
Questo significa che se è consistente e se $x \subsetneq x' \subseteq S$ allora x' è inconsistente.
Dati x e y, si ha che $x \preceq y$ se e solo se per ogni ψ sottoformula di ϕ se $\Box\psi \in x$ allora $\psi \in y$.
Per le variabili proposizionali P abbiamo definito che $x \Vdash P$ sse $P \in x$.
L'idea è quindi di dimostrare che se $\alpha \in S$ e $x \in X$ allora $x \Vdash \alpha$ sse $\alpha \in x$.
Se α è atomica segue dalla definizione. Vediamo i casi booleani per induzione, supponendo che per le sottoformule di α valga la proposizione.

$\underline{\alpha = \neg\beta}$ $\quad x \Vdash \alpha \iff x \nVdash \beta \iff$ (per HP induttiva) $\beta \notin x \iff x \cup \beta$ è inconsistente (vista la massimalità di x) $\iff \neg\beta \in x \iff \alpha \in x$.

$\underline{\alpha = \beta \wedge \gamma}$ $\quad x \Vdash \alpha \iff x \Vdash \beta$ e $x \Vdash \gamma \overset{HP}{\iff} \beta \in x$ e $\gamma \in x \iff$ $\beta \wedge \gamma \in x$ (utilizzando la massimalità di x).

$\underline{\alpha = \beta \vee \gamma}$ $\quad x \Vdash \alpha \iff x \Vdash \beta$ oppure $x \Vdash \gamma \overset{HP}{\iff} \beta \in x$ oppure $\gamma \in x \iff \beta \vee \gamma \in x$ (utilizzando la massimalità di x).

$\underline{\alpha = \beta \to \gamma}$ $\quad x \Vdash \alpha \iff \forall y \succeq x$ se $y \Vdash \beta$ allora $y \Vdash \gamma \overset{HP}{\iff}$ se $\beta \in y$ allora $\gamma \in y$. Ma anche $x \succeq x$ quindi $\iff$ se $\beta \in x$ allora $\gamma \in x \iff \beta \to \gamma \in x$ (utilizzando la massimalità di x).

$\underline{\alpha = \Box\beta}$ $\quad x \Vdash \Box\beta$ sse $\forall y \succeq x\,,\ y \Vdash \beta$. Dimostriamo che quest'ultima condizione è equivalente a $\Box\beta \in x$.
Per assurdo, supponiamo che $\Box\beta \notin x$ e dimostriamo che $\exists\, y \succeq x \ :\ \beta \notin y$. Sia infatti $y_0 = \{\gamma \in S \ :\ \Box\gamma \in x\} \ \cup\ \{\neg\beta\}$.
y_0 è consistente. Infatti se non lo fosse esisterebbero $\gamma_0 \ldots \gamma_n \ \in y_0$ tali che $\gamma_0 \ldots \gamma_n \vdash \beta$. Ne seguirebbe $\Box\gamma_1 \ldots \Box\gamma_n \vdash \Box\beta$, assurdo, poiché $\Box\gamma_1 \ldots \Box\gamma_n \in x$ e $\Box\beta \notin x$.
Quindi y_0 è consistente, ed è estendibile ad un $y \in X$ consistente massimale. $\neg\beta \in y$, e $y \succeq x$, poiché se $\Box\beta \in x$ allora $\beta \in y_0 \subseteq x$.
Quindi $\exists\, y \succeq x \ :\ \beta \notin y$.
Viceversa, se $\Box\beta \in x$ e $y \succeq x$, allora dalla definizione di $\succeq$ e da $\Box\beta \in x$ segue $\beta \in y$. □

La deducibilità di S4 segue dal seguente ragionamento: l'insieme dei teoremi di S4 è certamente ricorsivamente enumerabile (posso listare tutte le dimostrazioni finchè ne trovo una che termina con la formula data). Anche l'insieme dei non teoremi è ricorsivamente enumerabile (basta elencare tutti i modelli finiti e tutte le formule falsificabili in almeno uno di questi).
Quindi l'insieme dei teoremi di S4 è decidibile.

Corollario 2.4.1. *L'insieme dei teoremi della logica intuizionista è decidibile.*

Dimostrazione. $I \vdash \phi$ sse $S4 \vdash \phi^*$. Data ϕ, calcolo ϕ^* e decido se ϕ^* è dimostrabile in S4, utilizzando la decidibilità di S4. □

Capitolo 3

Logica dei matematici

Abbiamo visto come logica classica e logica intuizionista rispondano a esigenze diverse, ed anche come queste possano essere interpretate l'una nell'altra. Andiamo adesso a costruire, partendo dalle osservazioni fatte, quella che a nostro avviso risulta essere la logica usata comunemente in matematica. Partiamo da alcune considerazioni generali.

3.1 Osservazioni su connettivi e quantificatori

In generale, per quanto riguarda la congiunzione e il quantificatore universale, l'idea è che vengano utilizzati dai matematici in senso classico.
Anche per quanto riguarda la negazione, in genere quando si afferma $\neg A$, lo si intende in senso classico, cioè volendo significare "A è falsa". Come notato, per quanto riguarda l'implicazione, tanto nel linguaggio naturale quanto in matematica l'interpretazione classica risulta inefficace. Di conseguenza interpreteremo questo connettivo in un senso più vicino a quello intuizionista che non a quello classico. Per affermare $P \to Q$ si dovrà disporre di una dimostrazione di $P \to^c Q$ ove $\to^c$ denota l'implicazione classica.
Diverse sono le considerazioni riguardanti la disgiunzione e il quantificatore esistenziale.

Per entrambi, conserviamo entrambe le interpretazioni. In linea di principio l'osservazione è la stessa per i due operatori.
Mentre ci sono casi in cui ci basta sapere che esiste un certo elemento, oppure che una delle due affermazioni di una disgiunzione è valida, è pur sempre vero che in altre situazioni risulta importante sapere quale sia quel certo elemento, o quale sia l'affermazione corretta.
In effetti limitarsi alla visione classica può non essere soddisfacente.

Esempio 3.1.1. Consideriamo l'enunciato:
Esistono due numeri irrazionali positivi a e b tali che a^b sia razionale.
Vediamo una possibile dimostrazione.

Dimostrazione. Si distinguono due casi:

1. se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è razionale, allora basta prendere $a = b = \sqrt{2}$.
   Infatti, è ben noto che $\sqrt{2}$ sia irrazionale.
2. se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è irrazionale, basta prendere $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$.
   Infatti $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$, che è razionale. ☐

È una corretta dimostrazione di esistenza, ma è chiaro che un buon matematico è anche interessato a individuare quale dei due casi si verifica, ed in particolare certamente si considererà soddisfatto solo dopo essere arrivato alla conclusione che in effetti $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è irrazionale, e che quindi si verifica la seconda opzione.

Tuttavia vale anche l'inverso, ossia in molti casi il matematico comune è interessato solo all'esistenza di un oggetto matematico con opportune proprietà e non alla possibilità di costruirlo.

Esempio 3.1.2. Consideriamo il Teorema di Bolzano-Weierstrass,
Ogni sottoinsieme S limitato e infinito della retta reale ha almeno un punto di accumulazione.

Dimostrazione. Lo schema della dimostrazione è il seguente:

1. Consideriamo un intervallo I_1 che contiene l'insieme considerato e scegliamo un $a_1 \in S \cap I_1$.

2. Dividiamo I_1 in due parti uguali. Osserviamo che almeno una delle due contiene infiniti punti di S. Indichiamo con I_2 tale parte e scegliamo un elemento $a_2 \in S \cap I_2$, diverso da a_1. È possibile visto che $S \cap I_2$ è infinito.

3. Dividiamo I_2 in due parti uguali, osserviamo che una di queste conterrà infiniti punti di S, e chiamiamola I_3. Scegliamo un certo $a_3 \in S \cap I_3$, diverso sia da a_1 che da a_2.

Andando avanti allo stesso modo, si costruisce una successione di Cauchy $a_1, \dots a_n, \dots$ di elementi a due a due distinti di S, il cui limite è il punto di accumulazione cercato. □

Un intuizionista non accetta questa dimostrazione, visto che ogni volta che si divide l'intervallo vuole sapere quale dei due contiene infiniti punti di S, ed inoltre ha bisogno di un metodo per scegliere ogni a_i. Si dovrebbe inoltre rivedere la dimostrazione sulla convergenza delle successioni di Cauchy, e qui interverrebbe in modo presente anche la definizione di campo reale (ad esempio, bisogna vedere se le definizioni di campo Cauchy completo e di campo completo rispetto all'ordine sono equivalenti anche intuizionisticamente).
Ma un matematico medio non si pone questi problemi, e questa dimostrazione viene tranquillamente accettata nell'analisi.

Vediamo un altro esempio, dove la distinzione tra dimostrazione di esistenza e dimostrazione costruttiva risulta ancor più evidente.

Esempio 3.1.3. Consideriamo la Congettura di Goldbach, che afferma che ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due primi.
Chiamiamo numero di Goldbach un numero che è o dispari, o minore o uguale a 2, oppure è somma di due primi.
La congettura può allora essere espressa così:
Ogni numero naturale è di Goldbach.
Siamo in grado di dimostrare facilmente la seguente proposizione: *Esiste un numero naturale n tale che se n è di Goldbach, allora tutti i numeri naturali sono di Goldbach.*

Dimostrazione. Abbiamo due casi:

1. Tutti i numeri naturali sono di Goldbach. Allora basta scegliere come n un qualunque numero naturale. Infatti se tutti i numeri sono di Goldbach, per l'a fortiori, l'asserto continua a valere se si aggiunge l'ulteriore ipotesi che n sia di Goldbach.

2. Esiste un numero naturale m che non è di Goldbach. Basta allora prendere $n = m$. Per l'ex falso quodlibet, infatti, dall'ipotesi falsa che n sia di Goldbach segue qualunque cosa, in particolare anche che ogni numero naturale è di Goldbach. □

Vediamo che se fossimo realmente in grado di costruire questo certo n, saremmo in grado di decidere la congettura di Goldbach, con il seguente algoritmo:
Si distinguono due casi:

1. se n è dispari, o è minore o uguale a 2, allora è di Goldbach. Quindi, per la nostra proposizione, tutti i numeri naturali sono di Goldbach e la congettura risulta quindi vera.

2. se n è pari e maggiore di 2, per tutti gli interi i, con $2 \leq i \leq \frac{n}{2}$, verifico se sia i che $n - i$ sono primi. Se non trovo nessun i con questa proprietà, allora n è un controesempio alla congettura di Golbach, che quindi risulta falsa.

> Se invece esiste un i con $2 \leq i \leq \frac{n}{2}$ tale che sia i che $n - i$ sono primi, allora n è di Goldbach, e quindi sempre per la nostra proposizione la congettura risulta vera.

In effetti la dimostrazione della nostra proposizione, dal risultato antiintuitivo ma corretta, è una dimostrazione di esistenza, che un matematico sa ben distinguere da una dimostrazione costruttiva.

Il matematico quindi accetta l'interpretazione classica di $\vee$ e di $\exists$, ma affianca ad essa una interpretazione costruttiva. E le due possono anche portare a considerazioni diverse.
Ad esempio, se si interpreta classicamente il matematico accetta il Tertium non datur $A \vee \neg A$ (e.g. *o l'ipotesi del continuo è vera o è falsa*), ma con riferimento alla disgiunzione costruttiva non lo accetta (se A denota l'ipotesi del continuo, in base ai risultati di indipendenza di Gödel e Cohen $A \vee \neg A$ è falsa, in quanto né A né $\neg A$ sono dimostrabili).

3.2 Interpretazione di LM in S4

Il linguaggio di LM è dunque composto dai simboli classici con in aggiunta $\dot{\vee}$ (disgiunzione costruttiva) e $\dot{\exists}$ (esistenziale costruttivo).

In base alle osservazioni precedenti, abbiamo una interpretazione "naturale" di LM in S4.
Denotiamo l'interpretazione con il simbolo $^\circ$.

1. $\Phi^\circ \equiv \Phi$ per Φ atomica
2. $(\neg\Phi)^\circ \equiv \neg(\Phi^\circ)$
3. $(\Phi \wedge \Psi)^\circ \equiv \Phi^\circ \wedge \Psi^\circ$
4. $(\Phi \vee \Psi)^\circ \equiv \Phi^\circ \vee \Psi^\circ$
5. $(\Phi \dot{\vee} \Psi)^\circ \equiv \Box\Phi^\circ \vee \Box\Psi^\circ$
6. $(\Phi \to \Psi)^\circ \equiv \Box(\Phi^\circ \to \Psi^\circ)$
7. $(\exists x\, \Phi)^\circ \equiv \exists x\, \Phi^\circ$
8. $(\dot{\exists} x\, \Phi)^\circ \equiv \exists x\, \Box\Phi^\circ$
9. $(\forall x\, \Phi)^\circ \equiv \forall x\, \Phi^\circ$

Osservazione. Per il momento, non abbiamo ancora una assiomatizzazione "diretta" di LM, cioè una assiomatizzazione di LM che utilizzi solo i connettivi e i quantificatori di LM e non operatori esterni alla logica, come ad esempio $\Box$.

3.3 Modelli di Kripke per LM

Come per l'intuizionismo, anche per LM utilizziamo i modelli di Kripke per S4, dove interpreteremo invece della formula Φ la sua traduzione Φ°. Si ha quindi:

- $x \nVdash \bot$
- $x \Vdash P(a_1 \dots a_n)$ con P atomica può essere definito in modo arbitrario[1]
- $x \Vdash \Phi \wedge \Psi$ sse $x \Vdash \Phi$ e $x \Vdash \Psi$
- $x \Vdash \neg\Phi$ sse $x \nVdash \Phi$
- $x \Vdash \Phi \vee \Psi$ sse $x \Vdash \Phi$ o $x \Vdash \Psi$
- $x \Vdash \Phi \dot{\vee} \Psi$ sse (ricordando 5.) per ogni $y \succeq x$, $y \Vdash \Phi$ oppure per ogni $y \succeq x$, $y \Vdash \Psi$
- $x \Vdash \Phi \to \Psi$ sse (ricordando 6.) per ogni $y \succeq x$, se $y \Vdash \Phi$ allora $y \Vdash \Psi$
- $x \Vdash \exists x\, \Phi$ sse esiste $a \in D_x$ tale che $x \Vdash \Phi(a)$
- $x \Vdash \dot{\exists} x\, \Phi$ sse esiste $a \in D_x$ tale che per ogni $y \succeq x$, $y \Vdash \Phi(a)$
- $x \Vdash \forall x\, \Phi$ sse per ogni $a \in D_x,\ x \Vdash \Phi(a)$

Corollario 3.3.1. *Il frammento proposizionale di LM è decidibile.*

Dimostrazione. Segue dalla decidibilità di S4. ☐

---

[1] Questo segna una importante differenza con la logica intuizionista. Infatti nella semantica intuizionista si richiede che le formule atomiche si preservino all'insù (formalmente: per A atomica, se $w \Vdash A$ e $w' \succeq w$ allora $w' \Vdash A$) il che corrisponde a interpretare A atomica come "A è dimostrabile". Nel nostro caso, la richiesta di preservazione all'insù cade, e quindi A atomica è interpretata classicamente come "A è vera".

3.4 Deduzione naturale

Per introdurre il sistema di deduzione naturale per la nostra logica, iniziamo a vedere come si sviluppa in S4.

3.4.1 Deduzione naturale per S4

Regole:

- Quelle della deduzione naturale classica
- Introduzione di $\Box$

  $$\frac{A}{\Box A}\,{\scriptstyle \Box I}$$

  Purché tutte le assunzioni non scaricate da cui A dipende siano del tipo $\Box B$
- Eliminazione del $\Box$

  $$\frac{\Box A}{A}\,{\scriptstyle \Box E}$$

Esempio 3.4.1. Vediamo come sia possibile dedurre gli assiomi di S4.

- $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Box A}{A}\,{\scriptstyle \Box E} \qquad \cfrac{\Box(A \to B)}{A \to B}\,{\scriptstyle \Box E}}{B}\,{\scriptstyle \to E}}{\Box B}\,{\scriptstyle \Box I}}{\Box A \to \Box B}\,{\scriptstyle \to I}}{\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)}\,{\scriptstyle \to I}$$

N.B. Le assunzioni da cui dipende B sono del tipo $\Box$.

- $\Box A \to \Box\Box A$:

$$\dfrac{\dfrac{[\Box A]^{(1)}}{\Box\Box A}\,{\scriptstyle \Box I}}{\Box A \to \Box\Box A}\,{\scriptstyle \to I(1)}$$

- $\Box A \to A$:

$$\dfrac{\dfrac{[\Box A]^{(1)}}{A}\,{\scriptstyle \Box E}}{\Box A \to A}\,{\scriptstyle \to I(1)}$$

È possibile dimostrare come S4 (assiomatizzato "alla Hilbert Frege") sia corretto e completo rispetto alla deduzione naturale descritta sopra. Ci limitiamo a dimostrare la cosa per il frammento proposizionale, ma l'equivalenza vale anche per il primo ordine.

Sistema alla Hilbert-Frege per S4

L'idea di base dei Sistemi alla Hilbert-Frege (detti anche Sistemi Assiomatici) è quella di accettare come unica regola di inferenza il modus ponens, ossia $A, A \to B \vdash B$, e di introdurre opportuni assiomi in sostituzione delle altre regole (per maggiori informazioni si può consultare [4]).
È noto che il Sistema alla Hilbert-Frege per la logica classica è equivalente alla deduzione naturale.
Il sistema per S4 si ottiene aggiungendo al sistema della logica classica gli assiomi di S4: $\vdash \Box A \to A$, $\vdash \Box A \to \Box\Box A$, $\vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$, e la regola $\vdash A \to \Box A$ (nel caso in cui A dipenda unicamente da assunzioni di tipo $\Box$).

Teorema 3.4.1. *Se A formula proposizionale è dimostrabile in S4 (in base al sistema alla Hilbert-Frege) allora A è dimostrabile in deduzione naturale, ossia* $\underset{S4}{\vdash} A \to \underset{DN}{\vdash} A$.

Dimostrazione. Che gli assiomi di S4 siano dimostrabili in deduzione naturale è stato visto. Le regole di S4, ossia Modus Ponens e $\frac{A}{\Box A}$ con A teorema, sono rispettivamente $\to E$ e un'istanza di $\Box I$. Quindi sia gli assiomi di S4 che le regole di S4 sono derivabili in deduzione naturale. $\square$

Lemma 3.4.1. *Se* $\Gamma \underset{DN}{\vdash} A$ *allora* $\underset{S4}{\vdash} \bigwedge \Gamma \to A$*,*
dove se $\Gamma = \emptyset$*,* $\bigwedge \Gamma = \Gamma$*,*
e se $\Gamma = \psi_1 \dots \psi_n$*,* $\bigwedge \Gamma = \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i$*.*

Dimostrazione. Per induzione sulla lunghezza n della prova di A da $\Gamma \cup \psi$ in deduzione naturale.

- Se $n = 1$ o $A \in \Gamma$ o A è un assioma e l'asserto è ovvio.

- Supponiamo che l'ultima regola sia $\to I$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [B]^1 \\ | \\ \mathrm{C}\end{array}}{B \to C}\;{\scriptstyle \to I(1)}$$

  Per ipotesi induttiva $\underset{S4}{\vdash} (\bigwedge \Gamma \wedge B) \to C$ da cui $\underset{S4}{\vdash} \bigwedge \Gamma \to (B \to C)$.

- Supponiamo che l'ultima regola sia $\to E$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ | \\ \mathrm{B}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma \\ | \\ B \to A\end{array}}{\mathrm{A}}\;{\scriptstyle \to E}$$

  Per ipotesi induttiva $\underset{S4}{\vdash} \bigwedge \Gamma \to B$ e $\underset{S4}{\vdash} \bigwedge \Gamma \to (B \to A)$, da cui $\underset{S4}{\vdash} \bigwedge \Gamma \to A$.

In modo analogo si trattano gli altri casi proposizionali.

- Supponiamo ora che l'ultima regola sia $\Box I$

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ | \\ \mathrm{B} \\ \hline \Box B \equiv A \end{array} \; {\scriptstyle \Box I}$$

ove tutte le assunzioni in Γ sono di tipo $\Box$. Allora $\underset{S4}{\vdash} \bigwedge \Gamma \leftrightarrow \Box(\bigwedge \Gamma)$, visto che $\underset{S4}{\vdash} \Box A \leftrightarrow \Box\Box A$ e $\underset{S4}{\vdash} \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$.
Per ipotesi induttiva: $\underset{S4}{\vdash} \bigwedge \Gamma \rightarrow B$, da cui utilizzando il Modus Ponens e l'assioma (4) di S4 si ha $\underset{S4}{\vdash} \Box \bigwedge \Gamma \rightarrow \Box B$.
Ma da $\underset{S4}{\vdash} \Box \bigwedge \Gamma \leftrightarrow \bigwedge \Gamma$ si ha $\underset{S4}{\vdash} \bigwedge \Gamma \rightarrow \Box B$.

- Supponiamo infine che l'ultima regola sia $\Box E$

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ | \\ \Box A \\ \hline A \end{array} \; {\scriptstyle \Box E}$$

Per ipotesi induttiva vale $\underset{S4}{\vdash} \bigwedge \Gamma \rightarrow \Box A$.
Usando $\underset{S4}{\vdash} \Box A \rightarrow A$, concludo $\underset{S4}{\vdash} \bigwedge \Gamma \rightarrow A$. $\Box$

Teorema 3.4.2. *Se $\underset{DN}{\vdash} A$ allora $\underset{S4}{\vdash} A$, con A formula proposizionale.*

Dimostrazione. Segue dal lemma. Infatti se A è dimostrabile in deduzione naturale, ossia $\emptyset \underset{DN}{\vdash} A$, si ha che $\underset{S4}{\vdash} \emptyset \rightarrow A$ e quindi $\underset{S4}{\vdash} A$. $\Box$

3.4.2 Deduzione naturale per LM

Esistono due possibilità per costruire una deduzione naturale per la logica dei matematici. La prima, più semplice, consiste nell'interpretare la formula Φ in S4 e poi dimostrare in S4 la traduzione Φ° di Φ.
Prendiamo ad esempio la formula $(A \to B \land C) \to ((A \to B) \land (A \to C))$ Si dimostra la sua traduzione, ossia:

$$\Box(\Box(A \to (B \land C))) \to (\Box(A \to B) \land \Box(A \to C))$$

Basta dimostrare:

$$\Box(A \to (B \land C)) \to \Box(A \to B)$$

$$\Box(A \to (B \land C)) \to \Box(A \to C)$$

Vediamo ad esempio la prima:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Box(A \to (B \land C))}{A \to (B \land C)}\,{\scriptstyle \Box E} \qquad [A]^1}{B \land C}\,{\scriptstyle \to E}}{B}\,{\scriptstyle \land E}}{A \to B}\,{\scriptstyle \to I(1)}}{\Box(A \to B)}\,{\scriptstyle \Box I}$$

La dimostrazione della seconda è analoga.

Essendo molti connettivi di LM interpretati in senso classico, è prevedibile che LM non sia contenuta (come insieme di teoremi) nella logica intuizionista. Sorprendentemente non vale neppure il viceversa.

Teorema 3.4.3. *LM non contiene l'intuizionismo e non è in esso contenuta.*

Dimostrazione. Esistono infatti formule dimostrabili in LM ma non nell'intuizionismo I, ad esempio $\Phi \lor \neg\Phi$.

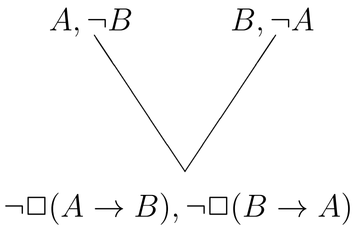
Ma esistono anche formule dimostrabili in I e non in LM, ad esempio:

$$(A \lor \neg A) \to ((A \to B) \lor (B \to A))$$

Infatti, in I:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^{(2)} \quad [A]^{(1)}}{\bot}\neg E}{B}\ \bot}{A \to B}{\to}I(1)}{(A \to B) \lor (B \to A)}\lor I \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^{(3)}}{B \to A}{\to}I}{(A \to B) \lor (B \to A)}\lor I \qquad [A \lor \neg A]^{(4)}}{(A \to B) \lor (B \to A)}\lor E}{(A \lor \neg A) \to ((A \to B) \lor (B \to A))}{\to}I(4)$$

Ma in LM la formula non è dimostrabile, perché se lo fosse, essendo dimostrabile $A \neg A$, sarebbe dimostrabile anche $(A \to B) \lor (B \to A)$, e quindi: $S4 \vdash \Box(A \to B) \lor \Box(B \to A)$, che è confutata nel seguente modello:



$\square$

La seconda strada consiste nel trovare un insieme di regole che agiscano direttamente sui connettivi e sui quantificatori di LM.
Questa seconda via appare più problematica, anche se più naturale, e al momento non abbiamo trovato una formulazione corretta e completa.
Ci ripromettiamo di farlo in seguito.

Conclusioni

In questo lavoro di tesi abbiamo proposto una logica che a nostro parere simula il ragionamento matematico comune. Si tratta però solo di un primo abbozzo. Infatti, siamo riusciti ad assiomatizzare la logica solo attraverso una sua interpretazione in S4, e non abbiamo ancora ad esempio un sistema di deduzione naturale per la logica. Segnaliamo quindi i seguenti problemi aperti:

1. Trovare un calcolo di deduzione naturale basato sui connettivi e sui quantificatori di LM
2. Trovare una assiomatizzazione alla Hilbert di LM
3. LM è interpretabile nella logica intuizionista?
4. La logica classica è interpretabile in LM? E la logica intuizionista?

Per quanto riguarda i problemi (2), (3), e (4) vorremmo brevemente delineare una possibile soluzione.
L'idea è di tradurre S4 in LM. La traduzione è basata sul fatto che $A \dot{\vee} B$ (la disgiunzione costruttiva) è interpretato come $\Box A \vee \Box B$, e quindi $A \dot{\vee} A$ è logicamente equivalente a $\Box A \vee \Box A$, e quindi a $\Box A$.

L'interpretazione di S4 in LM è allora definita come segue:

1. $P^\circ \equiv P$ per P atomica
2. $(\neg A)^\circ \equiv \neg(A^\circ)$
3. $(A \land B)^\circ \equiv A^\circ \land B^\circ$
4. $(A \lor B)^\circ \equiv A^\circ \lor B^\circ$
5. $(A \to B)^\circ \equiv \neg A^\circ \lor B^\circ$ (l'implicazione è quindi tradotta classicamente)
6. $(\exists x\, A)^\circ \equiv \exists x\, A^\circ$
7. $(\forall x\, A)^\circ \equiv \forall x\, A^\circ$
8. $(\Box A)^\circ \equiv A^\circ \dot{\lor} A^\circ$

La congettura è che sia $S4 \vdash A \iff LM \vdash A^\circ$. In particolare la logica classica si interpreta in LM come sopraindicato, escludendo però il caso $\Box$, in quanto non fa parte del linguaggio. La nostra congettura è che in questo modo una assiomatizzazione di LM si ottenga imponendo per ogni assioma A di S4, l'assioma A°, e traducendo con $^\circ$ anche le regole di S4.
La logica intuizionista I si dovrebbe allora interpretare in LM combinando l'interpretazione di S4 in LM, vale a dire:

1. $P^* \equiv P \dot{\lor} P$ per P atomica
2. $(A \land B)^* \equiv A^* \land B^*$
3. $(A \lor B)^* \equiv A^* \lor B^*$
4. $(A \to B)^* \equiv (\neg A^* \lor B^*) \dot{\lor} (\neg A^* \lor B^*)$
5. $(\exists x\, A)^* \equiv \exists x\, A^*$
6. $(\forall x\, A)^* \equiv \forall x\, A^* \dot{\lor} \forall x\, A^*$

Più complessa appare la traduzione di LM in I.
Un tentativo di interpretazione di LM in I è il seguente:

1. $P^\star \equiv \neg\neg P$ per P atomica
2. $(\neg A)^\star \equiv \neg\neg\neg A^\star$
3. $(A \wedge B)^\star \equiv \neg\neg(A^\star \wedge B^\star)$
4. $(A \dot{\vee} B)^\star \equiv A^\star \vee B^\star$
5. $(A \vee B)^\star \equiv \neg\neg(A^\star \vee B^\star)$
6. $(A \rightarrow B)^\star \equiv A^\star \rightarrow B^\star$
7. $(\dot{\exists} x\, A)^\star \equiv \exists x\, A^\star$
8. $(\exists x\, A)^\star \equiv \neg\neg\exists x\, A^\star$
9. $(\forall x\, A)^\star \equiv \forall x\, A^*$

Dove, come si era visto nella interpretazione della logica classica nella logica intuizionista, le formule P che in LM erano interpretate in senso classico si traducono come $P^\star \equiv \neg\neg P$.

Bibliografia

[1] Alfred Tarski. *Der Aussagenkalkül und die Topologie*. Fundamenta Mathematicae, 3, 1938.
English tr. in *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*. pp. 409-420, J. H. Clarendon Press, 1956.

[2] S. A. Kripke. *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic.*
J. Crossley and M. A. E. Dummett (eds.), 1965.

[3] S. A. Kripke. *Semantical Considerations on Modal Logic.*
Acta Philosophica Fennica 16, pp. 83-94 , 1963.

[4] Andrea Asperti, Agata Ciabattoni. *Logica a Informatica.*
McGraw-Hill, 1997.

[5] Dirk van Dalen. *Intuitionistic Logic.*
The Blackwell Guide to Philosophical Logic, Ed. L. Gobble, 2001.

[6] Dag Prawitz. *Natural Deduction: a Proof-Theoretical Study.*
Almqvist & Wiksell, 1965.

[7] Helena Rasiowa, Roman Sikorski. *The Mathematics of Metamathematics.*
Monografie matematyczne, Panstwowe Wydawn Naukowe, 1963.

[8] A. S. Troelstra. *Aspects of Constructive Mathematics.*
Handbook of Mathematical Logic, pp. 973-1052, J. Barwise, 1977.

[9] Giovanni Sambin. *Molteplicità delle Logiche e Necessità delle Traduzioni. Logica Intuizionistica e Logica Classica a Confronto.*
In *Un Mondo di Idee*, pp. 87-106. Collana I Blu Ed. Springer Verlag, a cura di C. Ciliberto, R. Lucchetti, 2011.