4-varietà simplettiche

Gruppi fondamentali e teorema di Gompf

Marco Golla

17-04-2008

Un po' di storia

XIX secolo: Formalismo Hamiltoniano $\rightarrow$ Geometria simplettica (dimensione *pari*).
Dimensione 4:

- esistenza di un'infinita più che numerabile di $\mathbb{R}^4$ esotici;
- esistenza di *infinite* strutture lisce su varietà topologiche;
- non esistenza di strutture lisce su varietà topologiche;
- *h*-cobordismo topologico ma non liscio;
- utilizzo di strutture complesse.

Un po' di storia

XIX secolo: Formalismo Hamiltoniano $\rightarrow$ Geometria simplettica (dimensione *pari*).
Dimensione 4:

- esistenza di un'infinita più che numerabile di $\mathbb{R}^4$ esotici;
- esistenza di *infinite* strutture lisce su varietà topologiche;
- non esistenza di strutture lisce su varietà topologiche;
- *h*-cobordismo topologico ma non liscio;
- utilizzo di strutture complesse.

Kähler $\Rightarrow$ simplettico; simplettico $\overset{?}{\Rightarrow}$ Kähler.
1976: Controesempio di Thurston.
1995: Tecniche di Gompf.

Definizione

Una *varietà simplettica* è una coppia (M, ω), con M varietà differenziabile e $\omega \in \Omega^2(M)$ è una 2-forma su TM con le seguenti proprietà:

- ω è *chiusa*, cioè $d\omega = 0$;
- ω_x è *non degenere* in ogni punto $x \in M$, cioè per ogni $v \in T_xM$ esiste $w \in T_xM$ tale che $\omega(v, w) \neq 0$.

Su $\mathbb{R}^{2n}$, con coordinate $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, la forma $\omega_0 = dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n$ è la *forma simplettica standard*.

Strutture a confronto

Definizione

Data M varietà differenziabile, ω_0, ω_1 forme simplettiche su M, un diffeomorfismo $\psi : M \to M$ si dice *simplettomorfismo* se $\psi^* \omega_1 = \omega_0$.

I simplettomorfismi sono troppo rigidi:

Definizione

Data M varietà liscia, due forme simplettiche ω_0, ω_1 si dicono:

- *isotope* se esiste una famiglia di forme simplettiche $\{\omega_t\}_{t \in I}$ che le collega;
- *fortemente isotope* se esiste un'isotopia $\{\psi_t\}_{t \in I}$ di M tale che $\psi_1^* \omega_1 = \omega_0$.

Varietà complesse e quasi-complesse

Definizione

- Una *varietà quasi-complessa* è una coppia (M, J), con M varietà differenziabile e $J : TM \to TM$ tale che $J^2 = -1$.
- Una *varietà complessa* è una varietà M differenziabile con un atlante $\{(U, \phi)\}$ tale che le carte $\phi : U \to \mathbb{C}^n$ e i cambi di carte siano olomorfi.

Complessa $\Rightarrow$ quasi-complessa; quasi-complessa $\not\Rightarrow$ complessa.

$\mathbb{C}^n$ e gli spazi proiettivi $\mathbb{P}^n = \mathbb{CP}^n$ sono varietà complesse.
$\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ ha una struttura quasi-complessa ma non complesse.

Varietà di Kähler e quasi-Kähler

Definizione

Una *varietà di Kähler* (risp. *quasi-Kähler*) è una terna (M, J, ω) dove (M, ω) è una varietà simplettica, (M, J) è una varietà complessa (risp. *quasi-complessa*) e valgono le seguenti proprietà:

- $\omega_x(J_x u, J_x v) = \omega_x(u, v)$ per ogni $x \in M, u, v \in T_x M$;
- $\omega_x(u, J_x u) > 0$ per ogni $x \in M, u \in T_x M$.

In questo caso $g = \omega_x(\cdot, J_x \cdot)$ è un prodotto scalare simmetrico su $T_x M$ definito positivo.
Due tra J, ω, g determinano univocamente la terza.

Convenzioni sulle sottovarietà

Tutte le varietà saranno *chiuse*.

Una sottovarietà $X \subset M$ è un'embedding $j : X \to M$ e $TX \subset TM$ sarà $j_*(TX) \subset TM$.
Di solito, $X \subset M$ sarà chiuso nella topologia di M.

Convenzioni sulle sottovarietà

Tutte le varietà saranno *chiuse*.

Una sottovarietà $X \subset M$ è un'embedding $j : X \to M$ e $TX \subset TM$ sarà $j_*(TX) \subset TM$.
Di solito, $X \subset M$ sarà chiuso nella topologia di M.

Sottovarietà di tipo speciale nelle varietà simplettiche:

Definizione

Una sottovarietà $X^m \subset (M^{2n}, \omega)$ si dice:

- *simplettica* se $\omega|_X$ è una forma simplettica;
- *lagrangiana* se $m = n$ e $\omega|_X \equiv 0$.

Alcuni esempi

- Ogni superficie compatta orientabile ammette strutture simplettiche.
- Data X^n varietà differenziabile, definiamo una forma su T^*X: una carta $x : U \subset \mathbb{R}^n \to X$ dà coordinate locali $(x, \xi) : U \times \mathbb{R}^n \to T^*X$ sul cotangente; $\omega_{can} = d\xi \wedge dx = d(\xi dx)$: *forma simplettica canonica*; la *sezione 0* $X_0 \subset T^*X$ e gli spazi cotangenti T_x^*X sono sottovarietà lagrangiane di T^*X.
- Ogni sottovarietà complessa di una varietà di Kähler è una sottovarietà simplettica.
- Proiettiva $\Rightarrow$ Kähler: $(\mathbb{P}^n, \omega_{FS})$ è di Kähler con la forma di *Fubini-Study*, e ogni sottovarietà complessa è di Kähler.

Risultati preliminari

Nelle prossime slide faremo una carrellata di risultati standard sulle varietà simplettiche e di Kähler, in particolare:

- orientabilità di varietà simplettiche;
- teorema di Darboux;
- teorema di Weinstein sugli intorni lagrangiani;
- principio soft-hard in geometria simplettica;
- teorema di Weinstein sugli intorni simplettici;
- applicazioni della teoria di Hodge alle varietà di Kähler.

Ostruzioni all'esistenza di strutture simplettiche

- Spazio vettoriale simplettico $\Rightarrow$ dimensione pari; varietà simplettica $\Rightarrow$ dimensione pari.
- (M^{2n}, ω) simplettica $\Rightarrow \omega^n$ non si annulla mai: esistenza di basi simplettiche $\{e_i^x, f_j^x\}$ (cioè tale che $\omega(e_i^x, f_j^x) = \delta_{ij}$) per ogni spazio tangente.
- (M^{2n}, ω) simplettica *chiusa* $\Rightarrow H^2_{dR}(M)$ non banale: se $\omega = d\lambda$, allora $d(\lambda \wedge \omega^{n-1}) = \omega^n$; per il teorema di Stokes, $0 = \int_{\partial X} \lambda \wedge \omega^n = \int_X \omega^n$, ma ω^n è una forma di volume.
- (Gromov) Su ogni varietà non compatta, senza bordo e di dimensione pari c'è una forma simplettica.

Il teorema di Darboux

Intorni dei punti:

Teorema (Darboux)

Sia (M, ω) una varietà simplettica, $x \in M$. Allora c'è un intorno aperto V di x con un diffeomorfismo $\psi : V \to \mathbb{R}^{2n}$ tale che $\psi^* \omega_0 = \omega$.

L'unico invariante locale delle varietà simplettiche è la *dimensione*.

Rigidità locale simile alla condizione *curvatura nulla*.

Sottovarietà lagrangiane

Intorni delle sottovarietà lagrangiane:

Teorema (Weinstein)

Data una sottovarietà lagrangiana $X^n \subset M^{2n}$ di una varietà simplettica (M, ω), allora esiste un simplettomorfismo $(U, \omega|_U) \to (U_0, \omega_{can})|_{U_0}$ di un intorno aperto $U \subset M$ di X con un intorno aperto U_0 della sezione 0 in T^*X.

Principio soft-hard

Forti condizioni di rigidità sulle varietà simplettiche: non toglie ricchezza alle varietà simplettiche.

Sottovarietà simplettiche

Intorni delle sottovarietà simplettiche:

Teorema (Weinstein)

Siano $X_i \subset M_i$ sottovarietà simplettiche di due varietà simplettiche (M_i, ω_i) $(i = 1, 2)$. Se c'è un isomorfismo $\Phi : \nu_1 \to \nu_2$ dei fibrati normali che estende un simplettomorfismo $(X_1, \omega_1|_{X_1}) \to (X_2, \omega_2|_{X_2})$, allora c'è un simplettomorfismo $\Psi : (U_1, \omega_1|_{X_1}) \to (U_2, \omega_2|_{X_2})$ di intorni aperti di X_i in M_i che preserva le fibre, nel senso che se $\exp : E(\nu_i) \to U_i$ è un diffeomorfismo, allora $\Psi \circ \exp = \exp \circ \Phi$.

Fondamentale per la costruzione

La coomologia delle varietà di Kähler

Invarianti topologici

Teoria di Hodge:
Coomologia di Dolbeaut di $M \to$ coomologia di de Rham di M.
$b_{2k+1}(M)$ *pari* per ogni k.

$H_1(M;\mathbb{Z})$ è l'abelianizzato di $\pi_1(M)$: forti restrizioni sul π_1 delle varietà di Kähler.

La coomologia delle varietà di Kähler

Invarianti topologici

Teoria di Hodge:
Coomologia di Dolbeaut di $M \to$ coomologia di de Rham di M.
$b_{2k+1}(M)$ *pari* per ogni k.

$H_1(M;\mathbb{Z})$ è l'abelianizzato di $\pi_1(M)$: forti restrizioni sul π_1 delle varietà di Kähler.

Invarianti più fini

Gompf: invarianti di Seiberg-Witten per distinguere simplettiche da Kähler.
Costruzione di infinite varietà omeomorfe a $K3$, con strutture simplettiche ma non di Kähler.

Setting differenziale e algebrico/complesso

Trasporto di costruzioni dalla topologia differenziale e dalla geometria algebrica alla geometria simplettica:

Somma connessa: X_1, X_2 varietà differenziabili di dimensione n; $\phi_i : (2B^n, 0) \to (X_i, \overline{x}_i)$ embedding che preservano orientazione; $X_1 \# X_2 = \coprod_i X_i \setminus \{\overline{x}_i\}/\sim$, con $x_1 \sim x_2$ sse $\phi_1^{-1}(x_1) = \phi_2^{-1}(x_2) \in B^n$.
$X_1 \# X_2$ ammette un'unica struttura differenziabile compatibile con le immersioni $X_i \setminus \{\overline{x}_i\} \to X_1 \# X_2$ indipendente dalle scelte fatte.

Scoppiamento: "rimpiazzare un punto con tutte le rette passanti per quel punto"; si usa per eliminare singolarità.

Il setting simplettico

Lemma (Audin)

Se (X_i^n, ω_i) sono due varietà simplettiche con $n \neq 2, 6$ allora la somma connessa $X_1 \# X_2$ non ammette forme simplettiche compatibili con le forme ω_i date.

Precisazione: *compatibili* $= \omega_i|_{X_i \setminus \{\overline{x}_i\}}$ e $\iota_i^* \omega$ sono isotope.

Idea della dimostrazione: per $n \neq 2, 6$, su S^n non ci sono strutture quasi-complesse.

Come costruire nuove varietà simplettiche?

L'idea di Gompf

Somma connessa: incollamento di due varietà attraverso il fibrato normale di una sottovarietà connessa di dimensione 0.

L'idea di Gompf

Somma connessa: incollamento di due varietà attraverso il fibrato normale di una sottovarietà connessa di dimensione 0.

Idea:

- costruire ϕ_r simplettomorfismo dell'anello $B_r^* = rB^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ (con la forma simplettica standard) in sè, che scambi "l'interno con l'esterno";
- usare ϕ_r per indentificare simpletticamente intorni di sottovarietà di codimensione 2 diffeomorfe e con fibrato normale isomorfo;
- incollare *simpletticamente* lungo i fibrati normali.

Osservazione: ϕ_r preserva area e orientazione.

Un paio di dettagli

La mappa ϕ_r:

$$\phi_r(x,y) = \left(x\sqrt{\frac{r^2}{x^2+y^2} - 1}, -y\sqrt{\frac{r^2}{x^2+y^2} - 1} \right).$$

Ponendo $\rho^2 = x^2 + y^2$

$$J\phi_r = \frac{1}{\rho^3\sqrt{r^2-\rho^2}} \begin{pmatrix} r^2y^2 - \rho^4 & -r^2xy \\ r^2xy & \rho^4 - r^2x^2 \end{pmatrix}$$

Si verifica

$$\phi^*\omega_0 = \omega_0.$$

La formalizzazione della costruzione

La somma simplettica di Gompf:

- (Q^{2n}, ω) varietà simplettica chiusa,
  $\iota_j : (Q^{2n}, \omega) \to (M_j^{2n+2}, \eta_j)$ due immersioni simplettiche,
  $\psi : \nu_1 \to \nu_2$ isomorfismo dei fibrati normali;
- per Weinstein, ψ dà un simplettomorfismo di intorni $U_j \subset M_j$ compatibili "fibra per fibra": incolliamo fibra per fibra tramite ϕ_r ($r \ll 1$);
- *somma simplettica* di M_1 ed M_2 lungo Q:
  $(M, \eta_r) = (M_1 \#_Q M_2, \eta_r)$.

Queste strutture sono *compatibili* con le strutture η_j su M_j, e differiscono tra loro per il volume $\int_M \eta_r$.

Scoppiamenti

Scoppiamento di una varietà complessa Z di dimensione (complessa) 2 in un punto: intuitivamente "sostituiamo un punto con il fascio delle rette tangenti passanti per quel punto".

- $Z = \mathbb{C}^2$ (coordinate z): $\tilde{\mathbb{C}^2} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ sottovarietà definita dai polinomi $z_j y_k - z_k y_j$ $(j, k = 1, 2)$, (y coordinate su $\mathbb{P}^1$); c'è un diffeomorfismo $\pi| : \tilde{\mathbb{C}^2} \setminus (\{0\} \times \mathbb{P}^1) \to \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.
- Z varietà complessa: si prende un intorno biolomorfo ad un aperto intorno a 0, $\Delta \subset \mathbb{C}^2$, e si ripete la costruzione localmente, usando $\pi|_\Delta$ come mappa d'incollamento.

Alcune osservazioni

- Topologicamente: scoppiare $\leftrightarrow$ fare la somma connessa con $\overline{\mathbb{P}^2}$: infatti scoppiare $\leftrightarrow$ togliere una palla immersa e mettere lo spazio totale del fibrato tautologico su $\mathbb{P}^1$.

Alcune osservazioni

- Topologicamente: scoppiare $\leftrightarrow$ fare la somma connessa con $\overline{\mathbb{P}^2}$: infatti scoppiare $\leftrightarrow$ togliere una palla immersa e mettere lo spazio totale del fibrato tautologico su $\mathbb{P}^1$.
- Van Kampen $\Rightarrow \pi_1(Z) = \pi_1(\tilde{Z})$.

Alcune osservazioni

- Topologicamente: scoppiare $\leftrightarrow$ fare la somma connessa con $\overline{\mathbb{P}^2}$: infatti scoppiare $\leftrightarrow$ togliere una palla immersa e mettere lo spazio totale del fibrato tautologico su $\mathbb{P}^1$.
- Van Kampen $\Rightarrow \pi_1(Z) = \pi_1(\tilde{Z})$.
- Z proiettiva $\Rightarrow \tilde{Z}$ proiettiva $\Rightarrow \tilde{Z}$ di Kähler $\Rightarrow \tilde{Z}$ simplettica.
- Si può definire uno "scoppiamento simplettico" (*tagli simplettici*).

Il teorema di Gompf

Cuore del colloquio: applicazione delle costruzioni precedenti verso:

Teorema (Gompf)

Per ogni gruppo G finitamente presentato esiste una 4-varietà simplettica chiusa (M, ω) tale che $\pi_1(M) = G$.

Il teorema di Gompf

Cuore del colloquio: applicazione delle costruzioni precedenti verso:

Teorema (Gompf)

Per ogni gruppo G finitamente presentato esiste una 4-varietà simplettica chiusa (M, ω) tale che $\pi_1(M) = G$.

Corollario

Non tutte le varietà simplettiche sono di Kähler.

Corollario

Per ogni gruppo finitamente presentato G esiste una 4-varietà che abbia G come gruppo fondamentale.

In dimensione bassa

Panoramica di quel che succede in dimensione inferiore:

- l'unica 1-varietà chiusa è S^1, e $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$;
- M_g superficie chiusa orientabile $\Rightarrow$
  $\pi_1(M_g) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g \mid \prod[\alpha_j, \beta_j] \rangle$;
  $b_1(M_g) = 2g$.
- non esistono 3-varietà il cui gruppo fondamentale sia $\mathbb{Z}^4$;
- Idea alternativa: il gruppo fondamentale di un CW complesso è determinato dal 2-scheletro e ogni complesso cellulare di dimensione 2 si immerge in $\mathbb{R}^4$.

Il controesempio di Thurston

Adattamento della costruzione di Thurston (1976):

$G \subset \operatorname{Diff} \mathbb{R}^4$ generato da $p \mapsto p + e_j$, per $j = 1, 2, 3$ e da $(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1 + y_1, y_1, x_2, y_2 + 1)$.

G agisce in maniera libera e propriamente discontinua su $\mathbb{R}^4$:il quoziente $X = \mathbb{R}^4/G$ è una 4-varietà il cui gruppo fondamentale è G.

Inoltre $g^*\omega_0 = \omega_0$ per ogni generatore: $G \subset \operatorname{Symp} \mathbb{R}^4$, quindi X è simplettica.

$G/[G, G] \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, quindi X non ha strutture di Kähler.

Il mattone fondamentale

Costruiamo V una 4-varietà simplettica, con cui faremo *somme lungo tori*.

P, Q polinomi omogenei di terzo grado in $\mathbb{C}[x, y, z]$, tali che $V(P), V(Q)$ in $\mathbb{P}^2$ si intersechino trasversalmente in B, insieme di 9 punti.
$\forall x \in \mathbb{P}^2 \setminus B$ passa la cubica $\lambda_x P + \mu_x Q$ ($(\lambda_x : \mu_x)$ ben definito come elemento di $\mathbb{P}^1$).
Definiamo $\pi : \mathbb{P}^2 \setminus B \to \mathbb{P}^1, x \mapsto (\lambda_x : \mu_x)$.
Scoppiamo $\mathbb{P}^2$ nei punti di B: chiamiamo V lo scoppiamento.

V ha dimensione complessa 2, e una fibrazione (singolare) π su $\mathbb{P}^1$: le fibre generiche di π sono tori (*fibrazione ellittica*).

Somma simplettica e gruppi fondamentali

V è una varietà proiettiva $\Rightarrow$ di Kähler $\Rightarrow$ simplettica. Sia ω_V la forma simplettica su V data da ω_{FS}.

Sia F una fibra generica di π: al di fuori dei punti singolari $\pi : V \to \mathbb{P}^1$ è un fibrato vettoriale: esiste $\pi(F) \in U \subset \mathbb{P}^1$ aperto tale che $\pi^{-1}(U) \simeq F \times U$:

$$F \text{ ha fibrato normale banale in } V.$$

(X, ω) varietà simplettica con un toro simplettico $T \subset X$ con fibrato normale banale in X: riscaliamo ω se necessario, e chiamiamo $M = X \#_T V$.

Van Kampen $\Rightarrow \pi_1(M) = \pi_1(X)/\iota_* \pi_1(F)$.

Un lemma omologico

Σ una superficie di Riemann di genere g, Γ grafo orientato *immerso* in Σ. Ogni ciclo $\gamma \in C(\Gamma)$ nel grafo rappresenta un ciclo in $H_1(\Sigma;\mathbb{Z})$.

Lemma

Esiste una 1-forma $\rho \in H^1_{dR}(\Sigma)$ tale che $\int_e \rho > 0$ per ogni arco e di Γ se e solo se 0 non appartiene al convessificato di $C(\Gamma)$ in $H_1(\Sigma;\mathbb{R})$.

Dimostrazione: per i teoremi di de Rham e dei coefficienti universali, $H^1_{dR}(\Sigma) = H_1(\Sigma;\mathbb{R})^\vee$.
$0 \notin \operatorname{conv} C(\Gamma) \Leftrightarrow C(\Gamma)$ è contenuto in un semispazio.
C'è un funzionale che è positivo su ogni ciclo di Γ. $\square$

Una precisazione sul lemma

Nel caso che ci interessa c'è di più: a meno di cobordi la forma ρ è una forma di volume (positiva, per la tesi del lemma) sugli archi di Γ.

Ipotesi: Supponiamo quindi che Γ sia determinato da una famiglia *generica* di curve chiuse.

Una precisazione sul lemma

Nel caso che ci interessa c'è di più: a meno di cobordi la forma ρ è una forma di volume (positiva, per la tesi del lemma) sugli archi di Γ.
Ipotesi: Supponiamo quindi che Γ sia determinato da una famiglia *generica* di curve chiuse.

Dimostrazione: Siano e un arco parametrizzato da $e : I \to \Sigma$, $\ell_e = \int_0^1 \rho(\dot{e})dt > 0$, λ_e la forma di volume $\lambda_e(\dot{e}) = \ell_e$.
I è contrattile, $\rho|_e - \lambda_e$ è chiusa $\Rightarrow$ esatta $\Rightarrow$ esiste f_e differenziabile definita su $\operatorname{Im} e$ tale che $\rho|_e + df_e = \lambda_e$, e $f_e(0) = f_e(1) = 0$.
Via partizioni dell'unità e genericità di Γ, estendiamo le f_e ad $f : \Sigma \to \mathbb{R}$: $\rho + df$ soddisfa le richieste fatte.

I preliminari

Σ superficie chiusa orientabile di genere k: una curva chiusa in Σ rappresenta una classe in $H_1(\Sigma;\mathbb{Z})$ ed una classe in $\pi_1(\Sigma, x_0)$.

Siano $G = \langle g_1, \dots, g_k | r_1, \dots, r_\ell \rangle$ gruppo finitamente presentato, $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k$ curve chiuse che danno i generatori standard di $\pi_1(\Sigma, x_0)$; generano anche $H_1(\Sigma;\mathbb{Z})$.

$L = \pi_1(\Sigma)/\langle \beta_1, \dots, \beta_k \rangle$ è libero su $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Fissiamo $\{\gamma_1, \dots, \gamma_\ell\}$ famiglia generica di curve chiuse con punto base x_0 che rappresentano $r_1, \dots, r_\ell$ in L; poniamo $\gamma_{\ell+i} = \beta_i$; Γ il grafo associato a $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell+k}\}$.

Claim: a meno somme connesse con tori (e allargamenti della famiglia) possiamo supporre che conv $C(\Gamma) \not\ni 0$.

La dimostrazione del claim - 1

Dimostrazione: Sia $\sum_{C(\Gamma)} \lambda_c[c]$ una combinazione convessa nulla in $H_1(\Sigma;\mathbb{R})$.

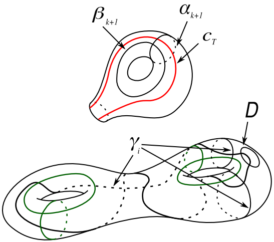
Fissiamo un toro bucato $T \setminus B$, $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, c_T$ curve tali che:

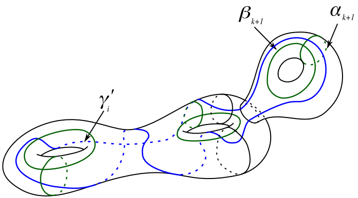
1. $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$ sono curve chiuse in $T \setminus B$, e $i_*[\alpha_{k+1}], i_*[\beta_{k+1}]$ generano $H_1(T;\mathbb{Z})$;
2. c_T sia la restrizione $\tilde{c}_T|_I$ di una curva chiusa $\tilde{c}_T : [0, 1+d] \to T$ tale che $[\tilde{c}_T] = [\beta_{k+1}] \in H_1(T;\mathbb{Z})$;
3. $\tilde{c}_T(t) \in B$ per ogni $t \in (1, 1+d)$, e $c_T(0) \neq c_T(1)$.

Siano $c \in C(\Gamma)$ con $\lambda_c \neq 0$, $D \subset \Sigma$ un disco intorno ad un punto di γ_j che interseca un solo arco di Γ, e incolliamo $T \setminus B$ di modo che c si concateni con c_T; siano c' il nuovo ciclo del grafo Γ', γ'_j la concatenazione di γ_j e c_T e Σ' la nuova superficie.

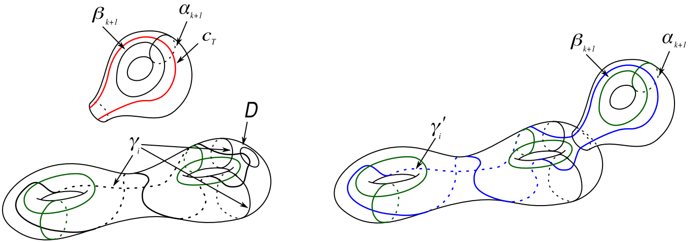
Allora $\displaystyle\sum_{C(\Gamma)\setminus\{c\}} \lambda_d[d] + \lambda_c[c'] = \lambda_c[\beta_{k+1}] \neq 0 \in H_1(\Sigma',\mathbb{R})$.

La dimostrazione del claim - 2





La dimostrazione del claim - 2



Dalle condizioni 1-4 la dimensione dello spazio delle combinazioni convesse nulle diminuisce.
Dalla condizione 2, $\pi_1(\Sigma')/\langle\gamma_j, \gamma_i'\rangle$ è isomorfo a G, perché $[\gamma_i]$ ha un rappresentante γ_i'' disgiunto da D, e $\gamma_i'' * \beta_{k+1} = \gamma_i'$.
Questo conclude la dimostrazione del claim. $\square$

La dimostrazione del teorema - 1

Abbiamo fissato $G = \langle g_i | r_j \rangle$, Σ superficie e α_i, β_i cammini che generano $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, γ_i cammini che rappresentano r_i, ρ 1-forma di volume su γ_i. Poniamo $\gamma_{\ell+i} = \beta_i$.

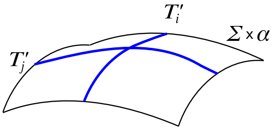
Siano $T = S^1 \times S^1$ e α curva chiusa semplice non banale in $H_1(T, \mathbb{Z})$, θ 1-forma su T e forma di volume positiva su α.

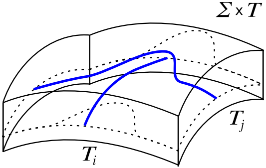
Sia $X = \Sigma \times T$ con $\omega = \pi_1^* \omega_1 \oplus \pi_2^* \omega_2$, e $T_i' = \gamma_i \times \alpha$.

T_i' è *lagrangiano* rispetto alla forma ω, simplettico rispetto alla 2-forma $\rho \wedge \theta$. Per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, la 2-forma $\omega_\varepsilon = \omega + \varepsilon(\rho \wedge \theta)$ è simplettica su X.

La dimostrazione del teorema - 2

Il toro T è $\alpha \times S^1$, perché α è chiusa e semplice: perturbiamo i T'_i in maniera simplettica, e otteniamo tori simplettici disgiunti T_i.





Sia poi $p_0 \in \Sigma$ tale che $T_0 = \{p_0\} \times T \subset X$ sia disgiunto da T_i:
T_0 è simplettico e ha fibrato normale banale in X.

La dimostrazione del teorema - 3

Per $i > 0$, il fibrato normale di T_i è isomorfo a quello di T_i': questo è il prodotto dei fibrati normali a α in T e a γ_i in Σ, banali per orientabilità.

Incolliamo ora una copia di V lungo una fibra generica F e un T_i per ogni indice i, e chiamiamo $M = X\#_{\mathbf{T}}^{\ell+k+1}V$ la varietà ottenuta: su M c'è una forma simplettica compatibile con ω_ε e con la forma ω_V su V.

La dimostrazione del teorema - 3

Per $i > 0$, il fibrato normale di T_i è isomorfo a quello di T_i': questo è il prodotto dei fibrati normali a α in T e a γ_i in Σ, banali per orientabilità.

Incolliamo ora una copia di V lungo una fibra generica F e un T_i per ogni indice i, e chiamiamo $M = X\#_{\mathbf{T}}^{\ell+k+1}V$ la varietà ottenuta: su M c'è una forma simplettica compatibile con ω_ε e con la forma ω_V su V.

Raccogliamo le informazioni sui gruppi fondamentali:

- $\pi_1(X) = \pi_1(T) \times \pi_1(\Sigma)$;
- $(\iota_0)_*\pi_1(T_0) = \pi_1(T)$;
- $(\iota_j)_*\pi_1(T_j) = \langle\alpha\rangle \times \langle\gamma_j\rangle$.

Dai lemmi sui gruppi fondamentali segue $\pi_1(M) = G$. $\square$

Bibliografia

- Gompf, *A new construction of symplectic manifolds*, Annals of Mathematics, 1995.
- McDuff, Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- Thurston, *Some simple examples of symplectic manifolds*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1976.