



Omologia di Floer combinatoria e invarianti di nodi legendriani e trasversi

Marco Golla

21-12-2009

- Anni '30: nasce la teoria dei nodi (Reidemeister, Tait, Alexander..)
- Anni '50 e '60: risultati di natura algebrica e topologica (Fox, Milnor, Lickorish, Wallace..)
- Anni '80: entra in gioco la teoria delle rappresentazioni (Jones); parallelamente nascono le teorie di gauge (Donaldson, Seiberg, Witten..) e invarianti di natura simplettica (Gromov, Floer..)
- Anni '00: vengono dimostrate la congettura di Poincaré (Perelman) e la *congettura della proprietà P* (Kronheimer, Mrowka); viene “categorificato” il polinomio di Jones (Khovanov, Rozansky); nasce come “semplificazione” dalle teorie di gauge l’omologia di Heegaard-Floer (Ozsváth, Szabó per le 3-varietà; Ozsváth, Szabó e Rasmussen per i nodi).

Un nodo è un filo chiuso nello spazio, considerato a meno di deformazioni:

Definizione

Un nodo è un'embedding $S^1 \rightarrow S^3$. Due nodi si dicono equivalenti se esiste un'isotopia $S^3 \rightarrow S^3$ che porta un embedding nell'altro.

Isotopia = deformazione dello complementare del filo.

Rappresentiamo graficamente i nodi come diagrammi nel piano



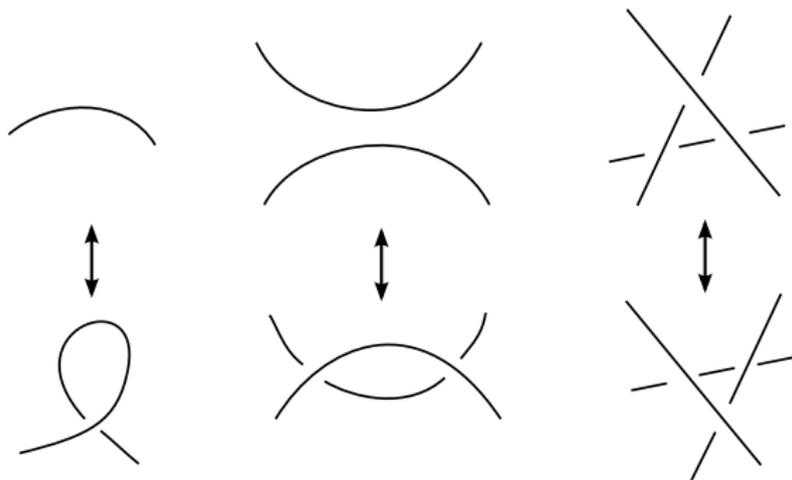


Figura: Le mosse di Reidemeister

Le mosse di Reidemeister dicono se due diagrammi rappresentano lo stesso nodo, *ma non c'è nessun algoritmo che permetta di distinguere due nodi.*

Vogliamo distinguere due nodi:

- Invarianti numerici: *crossing number*, numero di slacciamento, genere, genere slice, numero di p -colorazioni, determinante, segnatura...
- Invarianti polinomiali: polinomio di Alexander, polinomio di Jones, polinomio HOMFLY-PT..
- Invarianti omologici: omologia di Floer, omologie di Khovanov..

Vogliamo distinguere due nodi:

- Invarianti numerici: *crossing number*, numero di slacciamento, genere, genere slice, numero di p -colorazioni, determinante, segnatura...
- Invarianti polinomiali: polinomio di Alexander, polinomio di Jones, polinomio HOMFLY-PT..
- Invarianti omologici: omologia di Floer, omologie di Khovanov..

L'omologia di Floer solleva il polinomio di Alexander ad un complesso bigraduato (\widehat{HFK} categorifica il polinomio di Alexander).
Un'omologia di Khovanov categorifica il polinomio di Jones.

Ingredienti:

- una griglia $n \times n$;
- un insieme \mathbb{X} di simboli X , uno per riga e uno per colonna;
- un insieme \mathbb{O} di simboli O , uno per riga e uno per colonna, in caselle libere.

Ingredienti:

- una griglia $n \times n$;
- un insieme \mathbb{X} di simboli X , uno per riga e uno per colonna;
- un insieme \mathbb{O} di simboli O , uno per riga e uno per colonna, in caselle libere.

Regole del gioco:

- colleghiamo due simboli nella stessa colonna con un segmento, orientato dalla X alla O ;
- colleghiamo due simboli nella stessa riga con un segmento, passando sotto ogni linea già disegnata (e l'orientazione è forzata dalle O alle X).

		O			X
	X		O		
O		X			
	O			X	
			X		O
X				O	

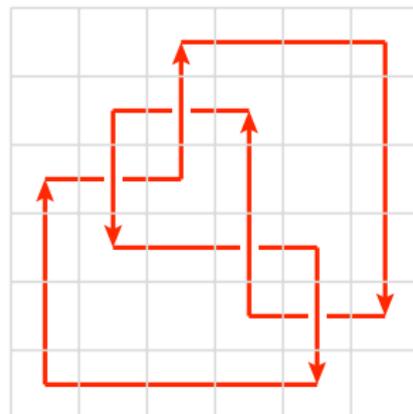


Figura: Una griglia e il nodo associato (figura 8).

Pensiamo ai diagrammi come diagrammi sul *toro*: ovvero li consideriamo a meno di permutazioni cicliche delle righe o delle colonne.

A livello di nodi, facciamo scivolare un arco sotto (o sopra) il diagramma.

Le mosse di Reidemeister si traducono in:

- C commutazioni;
- D destabilizzazioni;
- S stabilizzazioni.

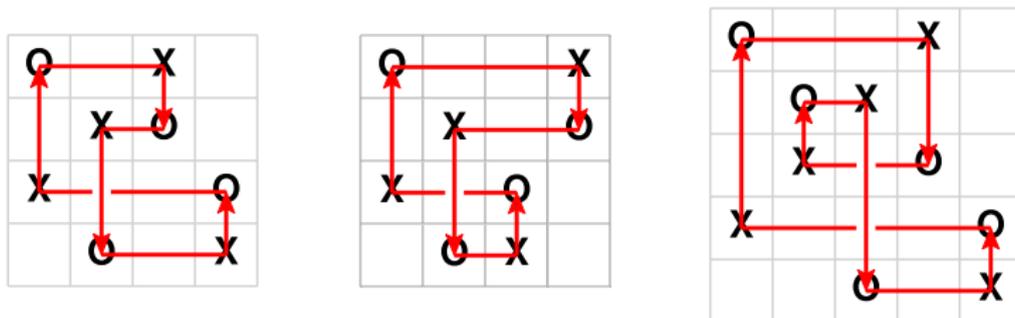


Figura: Dal primo diagramma al secondo si passa tramite una commutazione. Dal primo al terzo si passa tramite una stabilizzazione.

Classifichiamo le stabilizzazioni in base ai simboli coinvolti (X/O) e in base al quadratino vuoto (N/S , E/W): la stabilizzazione in figura è di tipo $X:SE$.

Chiamiamo \mathbf{S} l'insieme delle n -uple di punti su cerchi verticali ed orizzontali distinti (permutazioni su n elementi).

Come modulo CF^- è generato da \mathbf{S} su $\mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_n]$.

Chiamiamo \mathbf{S} l'insieme delle n -uple di punti su cerchi verticali ed orizzontali distinti (permutazioni su n elementi).

Come modulo CF^- è generato da \mathbf{S} su $\mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_n]$.

La gradazione di Maslov è

$$M(\mathbf{x}) = \mathcal{I}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \mathcal{I}(\mathbf{x}, \mathbb{O}) - \mathcal{I}(\mathbb{O}, \mathbf{x}) + \mathcal{I}(\mathbb{O}, \mathbb{O}) + 1.$$

La filtrazione di Alexander è individuata da

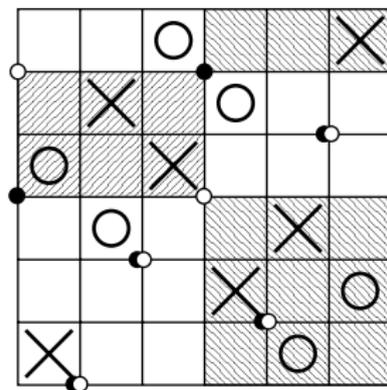
$$A(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbb{X}) - \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbb{O}) + \frac{1}{2} (\mathcal{J}(\mathbb{O}, \mathbb{O}) - \mathcal{J}(\mathbb{X}, \mathbb{X}) + 1 - n).$$

nel senso che

$$\mathcal{F}_s CF^- = \langle U_1^{m_1} \dots U_n^{m_n} \mathbf{x} \mid A(\mathbf{x}) - m_1 - \dots - m_n \leq s \rangle.$$

La moltiplicazione per U_i decresce la gradazione di Maslov di 2, quella di Alexander di 1.

Dati due generatori \mathbf{x}, \mathbf{y} che differiscono su esattamente due colonne, un rettangolo da \mathbf{x} a \mathbf{y} è



Un rettangolo si dice vuoto se non contiene altri punti di \mathbf{x} (o di \mathbf{y}): l'insieme dei rettangoli vuoti da \mathbf{x} a \mathbf{y} è $\text{Rect}^\circ(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Il differenziale è definito come

$$\partial^- \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{S}} \sum_{r \in \text{Rect}^\circ(\mathbf{x}, \mathbf{y})} U_1^{O_1(r)} \dots U_n^{O_n(r)} \mathbf{y}.$$

Il differenziale è definito come

$$\partial^- \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{S}} \sum_{r \in \text{Rect}^\circ(\mathbf{x}, \mathbf{y})} U_1^{O_1(r)} \dots U_n^{O_n(r)} \mathbf{y}.$$

L'oggetto graduato associato è il modulo $CFK^-(G)$, che pensiamo come lo stesso modulo solo con la bigradazione indotta da A .

Il differenziale nel complesso graduato si scrive come

$$\text{gr } \partial^- \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{S}} \sum_{r \in \text{Rect}_X^\circ(\mathbf{x}, \mathbf{y})} U_1^{O_1(r)} \dots U_n^{O_n(r)} \mathbf{y},$$

dove con Rect_X° indichiamo l'insieme dei rettangoli che non contengono X .

Teorema (Ozsváth, Szábo; Manolescu, Ozsváth, Sarkar;
Manolescu, Ozsváth, Szábo, Thurston)

Il tipo di quasi-isomorfismo di $CF^-(G)$ è invariante per le mosse CSD.

Teorema (Ozsváth, Szábo; Manolescu, Ozsváth, Sarkar;
Manolescu, Ozsváth, Szábo, Thurston)

Il tipo di quasi-isomorfismo di $CF^-(G)$ è invariante per le mosse CSD.

L'omologia non è solo un modulo su $\mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_n]$:

Proposizione

$HF^-(G)$ è un $\mathbb{F}_2[U]$ -modulo finitamente generato.

Corollario

$HFK^-(G)$ è un $\mathbb{F}_2[U]$ -modulo finitamente generato, invariante topologico del nodo associato a G .

Vogliamo considerare un complesso più piccolo,

$$\widehat{CF}(G) = CF^-(G)/\{U_1 = 0\},$$

con gradazione e filtrazione indotte da M, A (vedendo $\widehat{CF}(G)$ come sottocomplesso) e differenziale indotto dalla proiezione al quoziente $\pi : CF^-(G) \rightarrow \widehat{CF}(G)$.

Proposizione

$\widehat{HF}(G)$ è un \mathbb{F}_2 -modulo finitamente generato ed è un invariante topologico del nodo associato a G .

Vogliamo considerare un complesso più piccolo,

$$\widehat{CF}(G) = CF^-(G)/\{U_1 = 0\},$$

con gradazione e filtrazione indotte da M, A (vedendo $\widehat{CF}(G)$ come sottocomplesso) e differenziale indotto dalla proiezione al quoziente $\pi : CF^-(G) \rightarrow \widehat{CF}(G)$.

Proposizione

$\widehat{HF}(G)$ è un \mathbb{F}_2 -modulo finitamente generato ed è un invariante topologico del nodo associato a G .

Possiamo mettere in relazioni l'omologia di C^- e quella di \widehat{C} :

Proposizione

Il nucleo di $\pi_* : HF^-(G) \rightarrow \widehat{HF}(G)$ è l'immagine della moltiplicazione per U . Analogamente, il nucleo di $(\text{gr } \pi)_* : HFK^-(G) \rightarrow \widehat{HFK}(G)$ è l'immagine della mappa $\cdot U$.

Proposizione

Se $G, -G, \overline{G}$ sono griglie associate a $K, -K, m(K)$ rispettivamente, allora ci sono isomorfismi:

$$\begin{aligned}\phi_- &: \widehat{HFK}_d(G, s) \rightarrow \widehat{HFK}_d(-G, s) \\ \overline{\phi} &: \widehat{HFK}_d(G, s) \rightarrow \widehat{HFK}^{d-2s}(\overline{G}, -s)\end{aligned}$$

Il lato destro dell'ultima equazione indica la coomologia associata al complesso $\widehat{CF}(\overline{G})$, che nel caso dei coefficienti in \mathbb{F}_2 è isomorfa all'omologia.

Le dimensioni (i ranghi) sono uguali ai rispettivi ranghi in omologia.

Definizione

La caratteristica di Eulero graduata di un complesso bigraduato $C_d(s)$ è

$$\chi(C; t) = \sum \chi(C(s))t^s = \sum (-1)^d \text{rk } C_d(s)t^s.$$

Chiamiamo $\Delta_K \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ il polinomio di Alexander associato al nodo $K \subset S^3$.

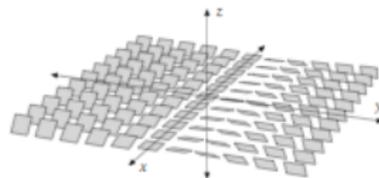
Proposizione (Categorificazione del polinomio di Alexander)

$$\chi(\widehat{HFK}(G); t) = \Delta_K(t).$$

Osservazione

Le simmetrie di Δ sono compatibili con le simmetrie di \widehat{HFK} .

Una struttura di contatto è una distribuzione di piani che non è tangente a nessuna superficie:



Definizione

Una *struttura di contatto* è un campo di piani definito da una 1-forma α tale che $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ in ogni punto.

Il campo $\xi = TS^3 \cap JTS^3$ delle tangenze complesse a $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ è una struttura di contatto su S^3 , ed è chiamata la *struttura di contatto standard*. $\xi|_{\mathbb{R}^3} = \ker dz - ydx$, dove \mathbb{R}^3 è identificato con $S^3 \setminus \{*\}$ tramite la proiezione stereografica.

Definizione

Un nodo *legendriano* è un embedding $S^1 \rightarrow S^3$ tale che $TS^1 \subset \xi$.
Due nodi legendriani si dicono equivalenti se sono isotopi tramite nodi legendriani.

Un nodo *trasverso* è un embedding $S^1 \rightarrow S^3$ tale che $TS^1 \cap \xi = 0$.
Due nodi trasversi si dicono equivalenti se sono isotopi tramite nodi trasversi.

Definizione

Un nodo *legendriano* è un embedding $S^1 \rightarrow S^3$ tale che $TS^1 \subset \xi$.
 Due nodi legendriani si dicono equivalenti se sono isotopi tramite nodi legendriani.

Un nodo *trasverso* è un embedding $S^1 \rightarrow S^3$ tale che $TS^1 \cap \xi = 0$.
 Due nodi trasversi si dicono equivalenti se sono isotopi tramite nodi trasversi.

Studiamo i nodi legendriani tramite le proiezioni frontali
 $p^f : (x, y, z) \mapsto (x, z)$, otteniamo dei diagrammi come i seguenti:



Non serve dire chi passa sopra/sotto agli incroci!

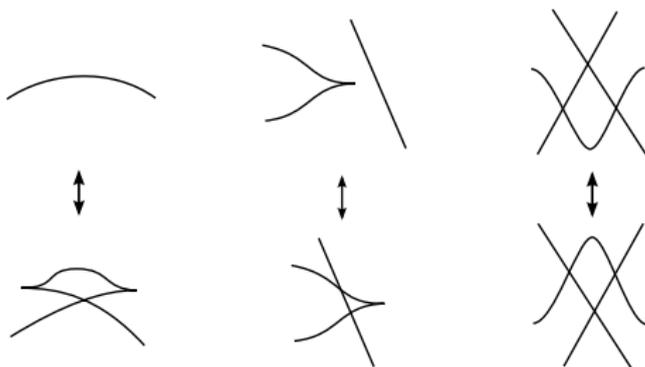


Figura: Le mosse di Reidemeister legendriane.

Vanno considerate le mosse mostrate in figura, quelle ottenute da esse ruotando ciascun diagramma di 180° e le isotopie piane senza creazione di tangenze verticali.

Definiamo delle operazioni sui nodi legendriani, via proiezioni frontali.

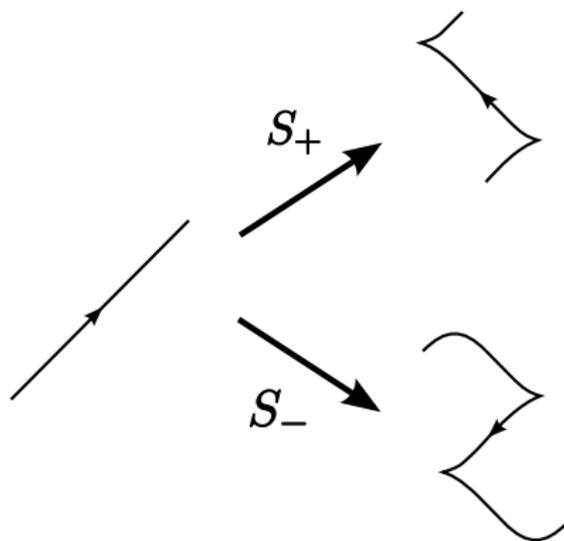


Figura: Stabilizzazioni di un nodo legendriano

Sono operazioni banali?

Associamo ad un nodo legendriano L un nodo K nodo trasverso tramite *push-off*: fissiamo un campo di vettori di Reeb V ($\alpha(V) \equiv 1$), chiamiamo il flusso Φ associato, e spingiamo il nodo lungo il campo di vettori. $K = \Phi_*^t(L)$ per $t \ll 1$.

Associamo ad un nodo legendriano L un nodo K nodo trasverso tramite *push-off*: fissiamo un campo di vettori di Reeb V ($\alpha(V) \equiv 1$), chiamiamo il flusso Φ associato, e spingiamo il nodo lungo il campo di vettori. $K = \Phi_*^t(L)$ per $t \ll 1$.

Associamo ad un nodo trasverso K un nodo legendriano L tramite *approssimazione legendriana*: consideriamo un intorno tubolare N_r di K di raggio r e il bordo $T_r = \partial N_r$. La struttura ξ induce una foliazione su T_r , e per alcuni valori di r le foglie della foliazione sono compatte. Diamo l'orientazione coerente con K , e otteniamo un'approssimazione legendriana di K .

Associamo ad un nodo legendriano L un nodo K nodo trasverso tramite *push-off*: fissiamo un campo di vettori di Reeb V ($\alpha(V) \equiv 1$), chiamiamo il flusso Φ associato, e spingiamo il nodo lungo il campo di vettori. $K = \Phi_*^t(L)$ per $t \ll 1$.

Associamo ad un nodo trasverso K un nodo legendriano L tramite *approssimazione legendriana*: consideriamo un intorno tubolare N_r di K di raggio r e il bordo $T_r = \partial N_r$. La struttura ξ induce una foliazione su T_r , e per alcuni valori di r le foglie della foliazione sono compatte. Diamo l'orientazione coerente con K , e otteniamo un'approssimazione legendriana di K .

Teorema (Fuchs, Tabachnikov; Epstein, Fuchs, Meyer)

Due approssimazioni legendriane di K sono negativamente stabilmente equivalenti; viceversa, i push-off di nodi legendriani negativamente stabilmente equivalenti sono trasversalmente isotopi

Dato un diagramma D di un nodo legendriano L , chiamiamo $wr D$ il numero di incroci *contati con segno*, $c(D)$ il numero di cuspidi di D , $c^\uparrow(D)$, $c^\downarrow(D)$ rispettivamente il numero di cuspidi ascendenti e discendenti di D .

Definizione

Il numero di Thurston-Bennequin $tb L$ di L è $wr D - c(D)/2$.

Il numero di rotazione $r(L)$ di L è $\frac{1}{2} (c^\uparrow(D) - c^\downarrow(D))$.

Il numero di auto-allacciamento (self-linking number) $sl K$ di un nodo trasverso è $wr(D_K)$ per una proiezione frontale D_K associata a K .

Dato un diagramma D di un nodo legendriano L , chiamiamo $wr D$ il numero di incroci *contati con segno*, $c(D)$ il numero di cuspidi di D , $c^\uparrow(D)$, $c^\downarrow(D)$ rispettivamente il numero di cuspidi ascendenti e discendenti di D .

Definizione

Il numero di Thurston-Bennequin $tb L$ di L è $wr D - c(D)/2$.

Il numero di rotazione $r(L)$ di L è $\frac{1}{2} (c^\uparrow(D) - c^\downarrow(D))$.

Il numero di auto-allacciamento (self-linking number) $sl K$ di un nodo trasverso è $wr(D_K)$ per una proiezione frontale D_K associata a K .

Proposizione

Se L è un'approssimazione legendriana del nodo trasverso K , allora $sl K = tb L - r(L)$.

Abbiamo costruito degli invarianti di nodi legendriani e trasversi, oltre al tipo topologico.

- Sono invarianti legendriani/trasversi “veri”?

Sì, vedi stabilizzazioni: $\text{tb } L^\pm = \text{tb } L - 1, r(L^\pm) = r(L) \pm 1.$

Abbiamo costruito degli invarianti di nodi legendriani e trasversi, oltre al tipo topologico.

- Sono invarianti legendriani/trasversi “veri”?
Sì, vedi stabilizzazioni: $\text{tb } L^\pm = \text{tb } L - 1, r(L^\pm) = r(L) \pm 1$.
- Sono invarianti completi?

Un nodo in S^3 si dice *legendrianamente/trasversalmente semplice* se gli invarianti classici distinguono tutti i rappresentanti legendriani/trasversi nella sua classe di isotopia (come nodi lisci).

Esempio

Il nodo banale e il nodo trifoglio sono trasversalmente semplici.

Prendiamo un diagramma di un nodo proveniente da una griglia, ruotiamo di 45° in senso orario.



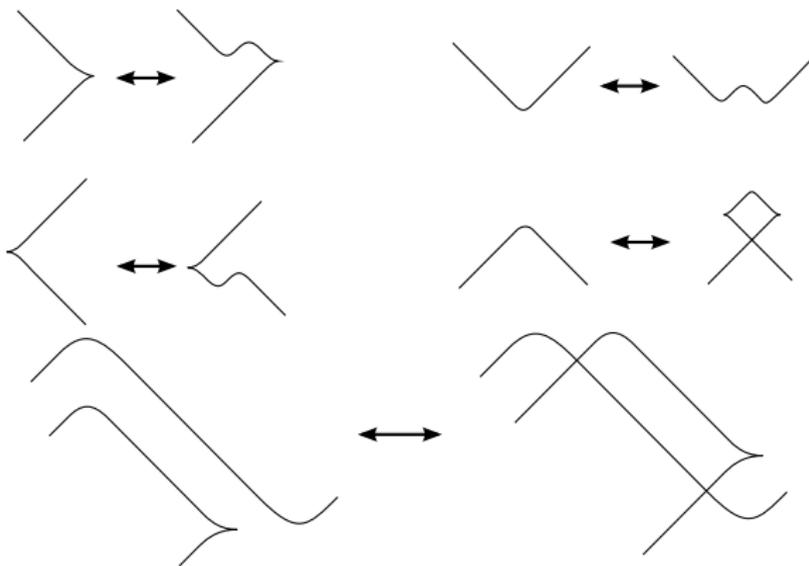
Figura: Da una griglia ad una (quasi) proiezione frontale.

Osservazione

“Quasi” = specchio: gli incroci sono sbagliati (rispetto alla convenzione sui nodi legendriani).

Le mosse CSD si dividono in tre categorie:

- I isotopie legendriane, cioè le mosse di commutazione, (de)stabilizzazioni di tipo NW , SE (mosse legendriane);



Le mosse CSD si dividono in tre categorie:

- IL** isotopie legendriane, cioè le mosse di commutazione, (de)stabilizzazioni di tipo NW , SE (mosse legendriane);
- S+** stabilizzazione (legendriana) positiva: (de)stabilizzazioni di tipo $X:NE$ o $O:SW$;
- S-** stabilizzazione (legendriana) negativa: (de)stabilizzazioni di tipo $X:SW$ o $O:NE$.

Le mosse CSD si dividono in tre categorie:

- IL isotopie legendriane, cioè le mosse di commutazione, (de)stabilizzazioni di tipo NW , SE (mosse legendriane);
- $S+$ stabilizzazione (legendriana) positiva: (de)stabilizzazioni di tipo $X:NE$ o $O:SW$;
- $S-$ stabilizzazione (legendriana) negativa: (de)stabilizzazioni di tipo $X:SW$ o $O:NE$.

Osservazione

Per dimostrare l'invarianza di un oggetto "legendriano" in HF^- o HFK^- basta dimostrarlo per le mosse del primo tipo (mosse legendriane).

Le mosse CSD si dividono in tre categorie:

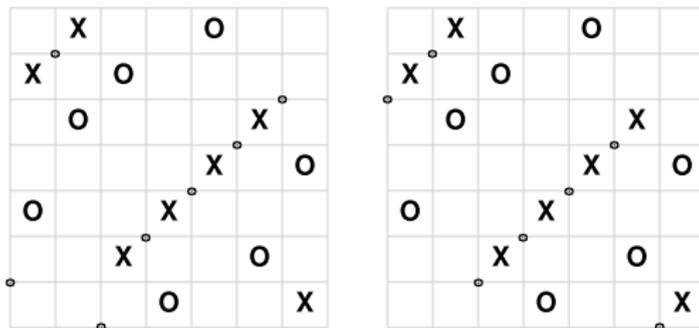
- IL isotopie legendriane, cioè le mosse di commutazione, (de)stabilizzazioni di tipo NW , SE (mosse legendriane);
- $S+$ stabilizzazione (legendriana) positiva: (de)stabilizzazioni di tipo $X:NE$ o $O:SW$;
- $S-$ stabilizzazione (legendriana) negativa: (de)stabilizzazioni di tipo $X:SW$ o $O:NE$.

Osservazione

Per dimostrare l'invarianza di un oggetto "legendriano" in HF^- o HFK^- basta dimostrarlo per le mosse del primo tipo (mosse legendriane).

Per dimostrare l'invarianza di un oggetto "trasverso" basta dimostrarlo per le mosse legendriane e per le stabilizzazioni legendriane negative.

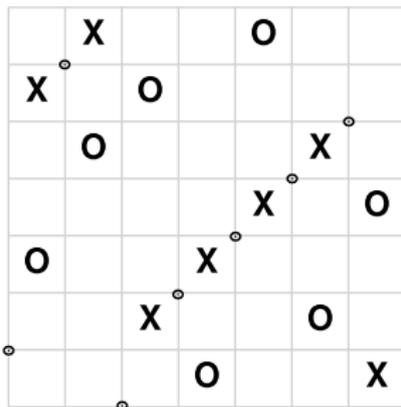
Dato un diagramma abbiamo delle scelte “semplificate” per alcuni generatori, che nelle proiezioni frontali corrispondono a punti a sinistra/destra delle cuspidi.



Teorema

\mathbf{x}^+ e \mathbf{x}^- sono cicli in $\text{HFK}^-(G)$ (e quindi in $\widehat{\text{HFK}}(G)$), e
 $2A(\mathbf{x}^\pm) = M(\mathbf{x}^\pm) = \pm r(K) - \text{tb } K + 1$.

Dimostriamo che \mathbf{x}^+ è un ciclo in $HFK^-(G)$:



Fissiamo $\mathbf{y} \in \mathbf{S}$, e consideriamo un rettangolo $r \in \text{Rect}^\circ(\mathbf{x}^+, \mathbf{y})$: nel vertice in alto a destra di r c'è un punto di \mathbf{x}^+ , quindi nel rettangolo r c'è una X , quindi $r \notin \text{Rect}_{\mathbb{X}}^\circ(\mathbf{x}^+, \mathbf{y})$, quindi \mathbf{y} non compare nella somma $\text{gr } \partial^- \mathbf{x}$.

Teorema

Un quasi-isomorfismo associato ad una mossa legendriana conserva i cicli legendriani, ed in particolare le classi $\lambda^\pm(G) = [\mathbf{x}^\pm(G)]$ sono invarianti del nodo legendriano L associato alla griglia G .

Teorema

Un quasi-isomorfismo associato ad una mossa legendriana conserva i cicli legendriani, ed in particolare le classi $\lambda^\pm(G) = [\mathbf{x}^\pm(G)]$ sono invarianti del nodo legendriano L associato alla griglia G .

Teorema

Le classi λ^\pm non sono di U -torsione (e in particolare non sono nulle).

Teorema

Un quasi-isomorfismo associato ad una mossa legendriana conserva i cicli legendriani, ed in particolare le classi $\lambda^\pm(G) = [\mathbf{x}^\pm(G)]$ sono invarianti del nodo legendriano L associato alla griglia G .

Teorema

Le classi λ^\pm non sono di U -torsione (e in particolare non sono nulle).

λ^\pm sono non-nulli, quindi sappiamo in quali componenti di Maslov e quali livelli della filtrazione vivono, e $r(K) = A(\lambda^+) - A(\lambda^-)$, $\text{tb}(K) = 1 - A(\lambda^+) - A(\lambda^-)$:

Corollario

Gli invarianti λ^\pm contengono almeno le stesse informazioni degli invarianti classici tb e r .

Vogliamo ricavare un invariante trasverso dai λ^\pm .

Proposizione

Se G_- è ottenuta dalla griglia G per una stabilizzazione di tipo NW o SE e Φ è l'omomorfismo associato, allora $\Phi(\lambda^+(G)) = \lambda^+(G_-)$.

Vogliamo ricavare un invariante trasverso dai λ^\pm .

Proposizione

Se G_- è ottenuta dalla griglia G per una stabilizzazione di tipo NW o SE e Φ è l'omomorfismo associato, allora $\Phi(\lambda^+(G)) = \lambda^+(G_-)$.

Grazie al teorema di Fuchs e Tabachnikov, possiamo dare la seguente definizione:

Definizione

Definiamo $\theta(K) = \lambda^+(L)$ dove L è un'approssimazione legendriana di K .

Infatti una stabilizzazione (combinatoria) di tipo NW o di tipo SE corrisponde ad una stabilizzazione (legendriana) negativa, e viceversa, quindi $\theta(K)$ è ben definito.

Claim

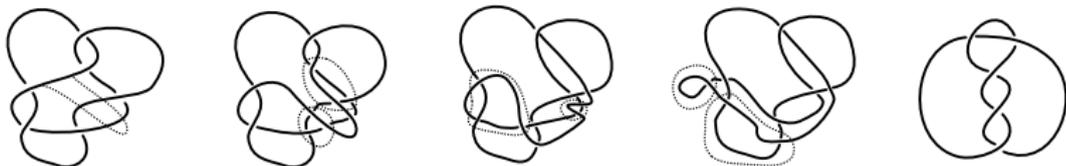
I due nodi legendriani associati alle due griglie in figura hanno gli stessi invarianti classici ma non sono legendrianamente isotopi.

		X				O
	X		O			
X		O				
	O			X		
			X		O	
				O		X
O					X	

	X			O		
X		O				
	O				X	
				X		O
O			X			
		X			O	
			O			X

Confrontiamone gli invarianti classici:

- Sono dello stesso tipo topologico (5_2):

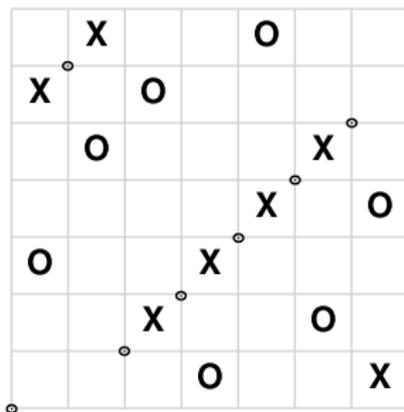


- Hanno numero di Thurston-Bennequin $tb K_1 = tb K_2 = -1$.
- Hanno lo stesso numero di rotazione $r(K_1) = r(K_2) = 0$.

Sono distinti da $\widehat{\lambda}^\pm$:

\mathbf{x}_1^\pm sono *isolati* nel complesso $\widehat{CF}(G_1)$, nel senso che non ci sono rettangoli vuoti da \mathbf{x} a \mathbf{x}_1^\pm per nessun \mathbf{x} .

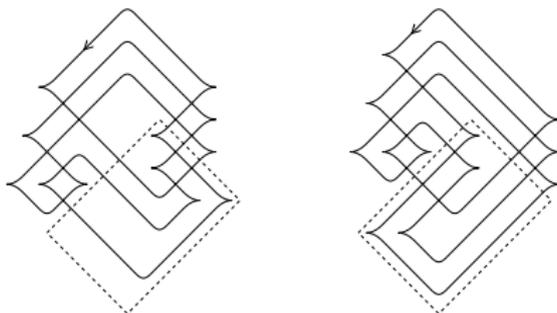
$\mathbf{x}_2^+ + \mathbf{x}_2^-$ è il bordo del generatore $\bar{\mathbf{y}} \in \widehat{CF}(G_2)$ in figura:



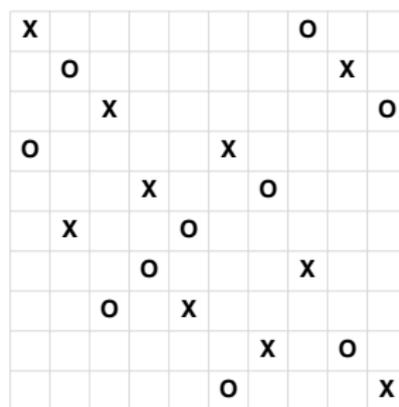
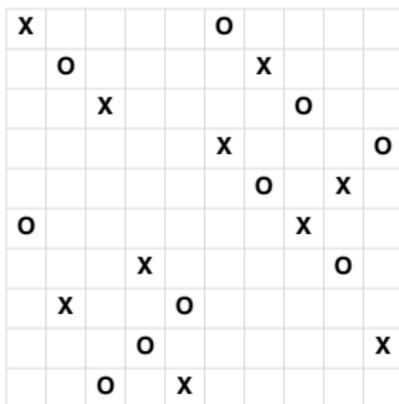
Quindi $\widehat{\lambda}_1^+ \neq \widehat{\lambda}_1^-$ ma $\widehat{\lambda}_2^+ = \widehat{\lambda}_2^-$

Claim

I due nodi trasversi, di cui abbiamo due approssimazioni legendriane in figura, hanno gli stessi invarianti classici ma non sono trasversalmente isotopi.



I due nodi sono topologicamente equivalenti (di tipo $m(10_{132})$).
L'altro invariante classico è $sl K_1 = sl K_2 = 1$: si calcolano infatti direttamente $tb L_1 = tb L_2 = 1$, $r(L_1) = r(L_2) = 0$.



Proposizione

\mathbf{x}_1^+ è un bordo in $\widehat{CF}(K_1)$, mentre \mathbf{x}_2^+ non è un bordo in $\widehat{CF}(K_2)$.

Quindi i due nodi *non* sono trasversalmente isotopi!

La verifica è stata fatta con un programma al computer.