Lezione 7: 02/05/2013

Onde nei fluidi

Se trascuriamo la viscosità, le onde trasversali non esistono, ma sono longitudinali (rarefazione e compressione)

Caratterizziamo un fluido con T, ρ, P, punto per punto.
In ogni punto consideriamo un insieme di molecole, non "molecola per molecola". Parliamo di cellette nello spazio.

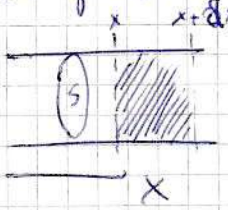
Quello che consideriamo sono valori medi e variazioni da queste:

$P = P_0 + p$ $\qquad p \ll P_0$

$T = T_0 + \tau$ $\qquad \delta\rho \ll \rho_0$

$\rho = \rho_0 + \delta\rho = \rho_0(1+s)$

Se ho una regione del fluido che si sposta, causiamo una variazione di pressione $\delta\rho$ (densità).



definiamo la funzione $\xi(x)$ che rappresenta quanto il fluido (l'aria) si è spostato rispetto all'equilibrio.

La massa contenuta all'interno del volume di fluido è:
$dm = \rho\, dV = \rho_0 S\, dx$.

All'arrivo della perturbazione abbiamo $dm = (\rho_0 + \delta\rho) S (dx + \xi(dx+x) - \xi(x))$

Possiamo scrivere: $dm = (\rho_0 + \delta\rho) S\, dx \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$

E trascurando effetti al second'ordine:

$$dm = \rho_0 S\, dx + \delta\rho\, S\, dx + \rho_0 S\, dx \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

ovvero: $\boxed{\delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}}$ Definiamo $\beta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P} = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$ compressibilità di un fluido, da cui $\frac{\partial V}{V} = -\beta\, \partial p$. N.B. spesso si definisce $\frac{1}{K} = \beta$, dove K = modulo di compressibilità.

$\boxed{\delta\rho = \rho\beta P}$ dall'equazione dei gas perfetti otteniamo:

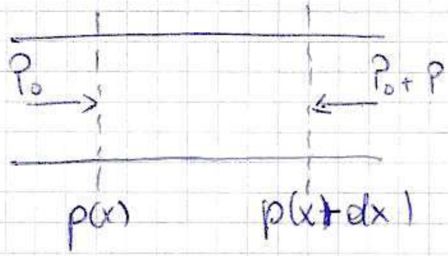
$PV = nRT = n N_A k T$

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{n M_0}{V} = \frac{n M_0 P}{nRT}$

A seconda del tipo di trasformazione, la conclusione è diverse.
Ad esempio, per un'isoterma:

(1) $\beta_T = \frac{1}{\rho}\frac{M_0}{RT} = \frac{1}{P}$) rel. dei gas perfetti

pressione



$$dF = S(p(x) - p(x+dx)) = \rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\boxed{-S\frac{\partial p}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

Partiamo da quest'ultima relazione:

$$-S\frac{\partial p}{\partial x} = -S\frac{1}{\rho_0\beta}\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial x} = \rho_0 S\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

$$S\frac{1}{\rho_0\beta}\rho_0\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \rho_0\beta\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

e $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\beta}}$

Se ipotizziamo che il processo sia isotermo $c = \sqrt{\frac{RT}{M_0}}$. È però un errore, perché il processo è adiabatico.

Le equazioni adiabatiche sono $PV^\gamma = cost.$ $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$

$\gamma_{aria} = 1,4$

$$\beta_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{V}\frac{1}{\partial P/\partial V} = -\frac{1}{V}\frac{1}{cos(-\gamma)V^{-\gamma-1}} = \frac{1}{cost}\cdot\frac{1}{\gamma}V^\gamma =$$

$$= \frac{\cancel{PV^\gamma}}{\cancel{cost}\,\gamma P} = \frac{1}{\gamma P}$$

A questo punto, $c = \frac{1}{\sqrt{\beta_S\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R}{M_0}T}$ che è quelle giusta!

$c_{aria} = 332\ m/s$

$c_{elio} = 1020\ m/s$

Notiamo che, in generale (non solo per i gas perfetti): $\beta_T = \gamma\beta_S$

Tutta la trattazione continua a valere per la pressione:

$$\nabla^2 P = \rho_0 \beta \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \qquad (\text{o anche } \rho)$$

La velocità di un elementino di fluido, è data da $\vec{v}$. È la velocità media del fluido nel punto.

Se vale $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ (no vortici) possiamo sempre scrivere $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$.

In generale, possiamo scrivere per un'onda qualsiasi:

$$\xi(\vec{x}, t) = \int d\vec{k} \left[A(\vec{k}) e^{i(kx - \omega t)} + B(\vec{k}) e^{i(kx + \omega t)} \right]$$

Domandiamoci ora quanto vale la forza e la ~~po~~ potenza dell'onda

$$F = SP = S \frac{1}{\beta \rho_0} \delta\rho = -S \frac{1}{\beta} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$W = Fv = -S \frac{1}{\beta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = + S \frac{1}{\beta} A^2 (+ik)(i\omega)$$

Nel caso di un'onda piana: $\xi(x,t) = A e^{i(\omega t - kx)}$

$$\langle W \rangle = \frac{S}{\beta} A^2 \frac{\omega^2}{c} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{S A^2 \omega^2}{\beta c} = \frac{1}{2} S A^2 \omega^2 \rho_0 c \rightarrow$$ impedenza caratteristica dell'aria.

L'intensità dell'onda è poi: $I = \frac{\langle W \rangle}{S} = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 z_0$

Definiamo l'impedenza acustica $z = \frac{P}{v}$

$$\xi = A e^{i(\omega t - kx)} \rightarrow v = \dot{\xi} = A i\omega e^{i(\omega t - kx)}$$

$$P = A_P e^{i(\omega t - kx)}$$

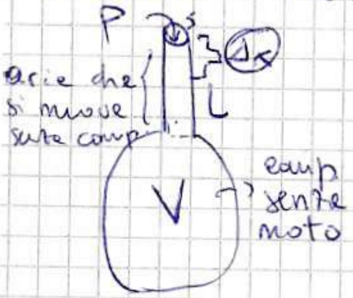
Ricordando che $-\frac{\partial}{\partial x} P = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\xi})$

$$-A_P(-ik) e^{i(\omega t - kx)} = \rho_0 A(-\omega^2) e^{i(\omega t - kx)} =$$

$$= \rho_0 (i\omega) v$$

$$ikP = i\omega \rho_0 v \; ; \quad z_0 = \frac{P}{v} = \frac{i\omega\rho}{ik} = \rho_0 c$$

Consideriamo ora un risuonatore di Helmotz. Nell'approssimazione



$\lambda >>$ dimensioni $\rightarrow$ valori costanti su tutta la bottiglia.

Applichiamo una p al collo della bottiglia

$$\frac{p}{p_0} = -\gamma\frac{\Delta V}{V_0} = -\gamma\frac{S\Delta x}{V}$$

La massa $m = \rho S L$ è l'inerzia del collo.

Ipotizziamo poi che la forza di reazione del volume è $k = -\frac{F}{\Delta x} = \frac{Sp}{-\Delta x}$

ovvero: $k = \frac{S\cancel{p}V}{\frac{p}{p_0}\cdot\frac{1}{\gamma S}} = \frac{S^2 p\gamma}{V}$

Se questo è un O. A. come modellizzato: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{S^{\cancel{2}}p\gamma}{V\rho\cancel{S}L}}$

$$= c\sqrt{S\,(VL)^{-1}} = \boxed{c\sqrt{\frac{S}{VL}}}$$

Lezione 8: 10/05/2013

Abbiamo visto l'equazione $\nabla^2\xi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ $\quad \xi(\vec{x},t) = \int d\vec{k}\, a(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} + c.c.$

$F = pS = -\frac{1}{\beta_s}\frac{\partial\xi}{\partial x}\,S$

Se scriviamo $\xi = A\,sen(\omega t - kx)$

$\langle W\rangle = \frac{1}{\beta_s}SA^2\frac{\omega}{2}k = \frac{1}{2}\overbrace{\rho A^2\omega^2 c}^{dE/dV}S$

$W = F\cdot v = -\frac{1}{\beta_s}S\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial t}$

da cui $I = \frac{\langle W\rangle}{S} = \frac{1}{2}(\rho A^2\omega^2)c =$

$= \frac{1}{2}\underbrace{\rho c}_{Z}\underbrace{A^2\omega^2}_{A_v^2} = \frac{1}{2}\frac{A_p^2}{\rho c}$

$$m\ddot{\xi} + \underbrace{k\xi}_{\text{forza elastica}} = \overbrace{F_0 e^{i\omega t}}^{\text{forzante}}$$

ξ è lo spostamento superficiale. In 3D è più pratico usare volumi d'aria spostati $\dot{V}$.
Nel caso di onda piana:
$V = \xi S$

$$\frac{m\ddot{V}}{S^2} + \frac{kV}{S^2} = \frac{F_0}{S}e^{i\omega t}$$

impedenza "volumica" che è l'impedenza vera del mezzo.

se $k \simeq 0 \Rightarrow \frac{m\dot{V}}{S^2} = p \Rightarrow \frac{i m\omega\dot{V}}{S^2} = p \Rightarrow Z = \frac{p}{\dot{V}} = \frac{i\omega m}{S^2}$

Se invece $m \simeq 0$ $\frac{KV}{S^2} = p$; $\frac{K\dot{V}}{i\omega S^2} = p$ $Z = \frac{p}{\dot{V}} = \frac{K}{i\omega S^2}$

L'impedenza globale è data da: $Z = i\left(\omega \frac{M}{S^2} - \frac{K}{\omega S^2}\right)$

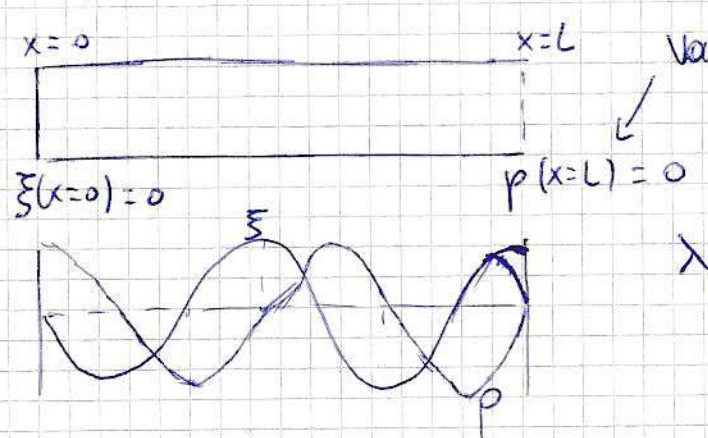
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ " L $\qquad$ " $1/C$

Tubo $\Rightarrow$ $Z = i\omega \frac{\rho S L}{S^2}$

Cavità $\Rightarrow$ $Z = \frac{K}{i\omega S^2} = \frac{1}{i\omega \beta_s S L}$

La Z del risuonatore di Helmotz è: $Z = i\left(\frac{\rho L \omega}{S} - \frac{\rho c R}{V\omega}\right)$

C'è una frequenza a cui la Z è nulla: $\omega_0 = c\sqrt{\frac{S}{VL}}$, che è la stessa del conto già fatto. In generale c'è anche un termine reale, che non può essere annullato.



Var. pressione nulla

$$\begin{cases} \xi(x=0) = 0 \\ p(x=L) = 0 \end{cases}$$

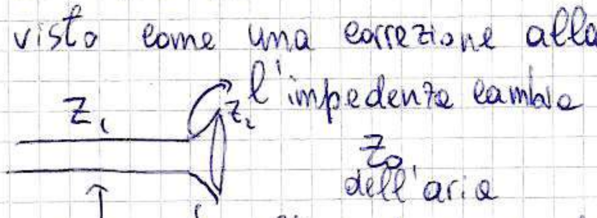
$\lambda_n = \frac{2L}{m}$ $\qquad f_n = \frac{c}{2L} n$

Per un tubo aperto a dx e sx: $\lambda_n = \frac{4L}{2n+1}$ $\qquad f_n = \frac{c}{4L}(2n+1)$

$\hookrightarrow p(x=0) = p(x=L) = 0$

La condizione $p(x=L)=0$ non è verificata al 100%, perché qualcosa vogliamo sentire fuori... Questo introduce inarmonicità nello spettro.

Il fatto che l'aria vibri un poco anche fuori dal tubo può essere visto come una correzione alla lunghezza



l'impedenza cambia in modo continuo, non come un tubo dove passa da Z a Z_0 bruscamente.

Possiamo fare in modo che $Z_2 \simeq Z_0$, in questo modo esce più aria, e quindi otteniamo un suono più intenso all'esterno.

$p = \frac{A_p e^{i(\omega t - kr)}}{r}$ $\qquad \dot{\vec{\xi}} = \vec{v}$

$\vec{\nabla} p = -\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ per un fluido irrotazionale: $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$, e quindi

$\vec{\nabla}\left(p + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = 0$ un modo per soddisfare l'eq. è $p + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \phi = -\frac{p}{\rho i \omega} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla}\phi = -\frac{1}{\rho i \omega} \vec{\nabla} p .$$

In simmetria sferica, avremo: $\vec{v} = -\frac{1}{\rho i \omega} \hat{r} \frac{\partial p}{\partial r}$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{A_p (-ik) e^{i(\omega t - kr)}}{r} - \frac{A_p e^{i(\omega t - kr)}}{r^2}$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{1}{\rho c}\left(1 - \frac{i}{kr}\right) p \hat{r}}$ La Z ora è complessa, e vale:

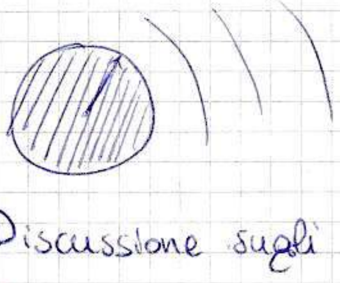
$$Z = \frac{\rho c}{1 + kr}(i + kr)\, kr$$

Questo è un modello di propagazione sferica nell'aria:

$$Z = \begin{cases} kr \gg 1 \rightarrow Z \Rightarrow \rho c \Rightarrow \text{onda piana} \\ kr \ll 1 \rightarrow Z = i k r \rho c \Rightarrow \text{sfasate di } \frac{\pi}{2} \text{ (intensità nulla!)} \end{cases}$$

Attenzione perché questo vale solo nell'aria! Per emettere suoni, devo far sì che $\frac{1}{k} \lessgtr r$, in modo da non arrivare mai nella zona $kr \ll 1$.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$



Discussione sugli strum e Foto / Slide.

La voce umana

Tratto vocale: risuonatore ~ tubo complicato.

Corde vocali: oscillatore

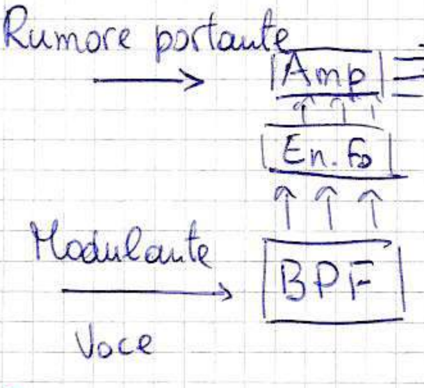
Quattro regioni che posso far variare (lingua, labbra, mascella) e sono dette formanti. A seconda della vocale cambia la prima formante e la seconda

Lezione 9 17/05/2013

Voder Dudley 1939

Voice Operating Demonstrator

Vocoder → analizzatore di spettro con banchi di filtri ed envelope followers che controllano il guadagno.



Prendiamo l'inviluppo della voce ma la frequenza del rumore

Percezione del suono

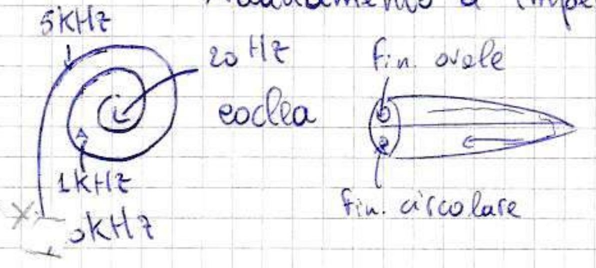
Orecchio Umano

Orecchio esterno → canale auricolare → timpano → ossicini → coclea → nervo

ossicini → tuba di Eustachio

Ossicini: martello incudine staffe

Adattamento d'impedenza → guadagno +20 dB



L'onda che si propaga nella coclea cambia ampiezza nello spazio, ma ha un picco in un punto per poi andare a zero.

Teoria posizionale di Bekesy { Correlazione tra f. e pto di max risposta; disposizione logaritmica.

Non basta per spiegare tutto, perché noi abbiamo una risoluzione del 0,2% non interpretabile solo con il meccanismo posizionale.

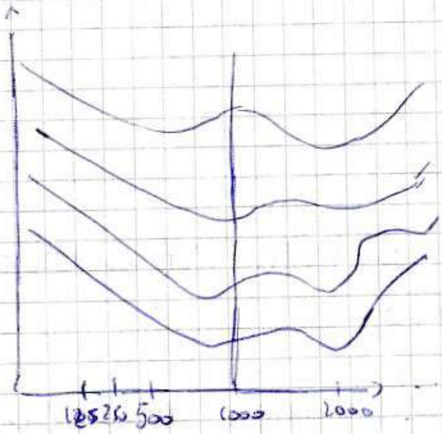
Teoria della frequenza → neuroni si attivano in sincronismo con lo stimolo, ma non ad ogni ciclo

Intervalli di attivazione sono multipli casuali della frequenza.

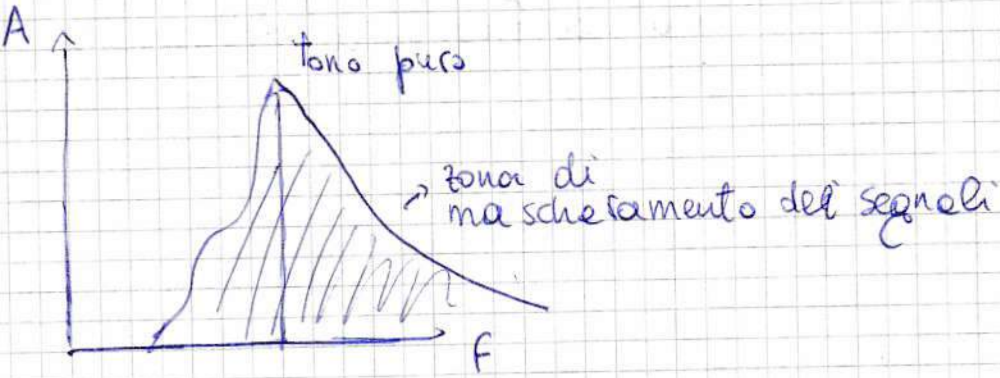
Intensità → Volume
Frequenza → Altezza
Spettro → Timbro
Inviluppo

Parametri psicofisici → Int. e frequenza; → Ritmo e frequenza

Curve di Fletcher



Phon = dB ad 1 KHz



Percezione dell'intensità

$S_2 - S_1 = 2k \log \frac{P_2}{P_1}$ In realtà è una potenza

Sone = 1 sone = 40 phon.

sone × 2 ⇒ raddoppio volume = +10 dB

Toni di Shepard

Lezione 10 : 24/05/2013

Battimenti, suoni di Tartini || Suoni.

→ Fondamentale mancante

Frequenze

1 → 2 → 3 → 4

ok ok

(1 + 1,10) No, non va bene

(1 → 2) ottava

(2 → 3)

ragione $\frac{3}{2}$

$1 ; \frac{3}{2} ; \frac{9}{4} ; \frac{27}{8}$

1 2

riporto le note nell'ottava

Quando abbiamo fatto 12 note, otteniamo una cosa molto vicina ad 2, ma non proprio.

$1 ; \frac{3}{2} ; \frac{9}{8} ; \frac{27}{16} ; \frac{81}{64} ; \frac{243}{128} ; \frac{729}{512} ;$

$\frac{2187}{2048}$ ...

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^6} = 2,0273 \quad \left(\text{non è possibile che } \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m \dots \right)$$

$$\rightarrow \frac{3^{12}}{2^{18}} = 1,01364 \Rightarrow \text{coma pitagorico}$$

Questo processo genera il circolo delle quinte

Tra $\frac{9}{8}$ e $\frac{27}{16}$: rapporto di $\frac{3}{2}$

Problema: $1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128}, 2$

→ la scala non si chiude : c_p

la scala non ha il valore $\frac{5}{4}$ (al posto di $\frac{81}{64}$ .. $\frac{81}{80} = c_s$)

Modifichiamo leggermente le quinte in modo da far suonare bene le terze.
Purtroppo il problema delle partenze resta. Si risolve con il temperamento equabile:

$1 \quad 1\alpha \quad \quad \quad 2 \quad 2\alpha$

→ Faceva schifo a tutti, ma alla fine ha vinto.

Intervallo $\alpha = \sqrt[12]{2}$

Altri criteri per fare le scale $\begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases}$ minimizzare il χ^2.

Lezione 11 : 31/05/2013

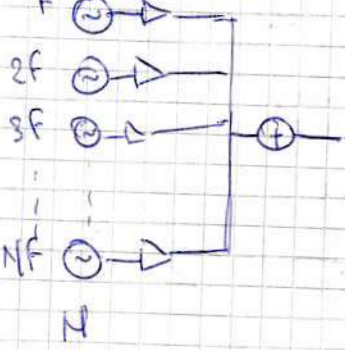
Il concetto di sintesi del suono è quello di riuscire a riprodurre suoni utilizzando meno informazioni di quelle necessarie

Sintesi del suono ⇒ elettronica, diversi sistemi di sintesi $\begin{cases} \text{analogici} \\ \text{digitali} \end{cases}$

Sintesi additiva → trasformata di Fourier

↳ organo a canne → limitazione sui livelli

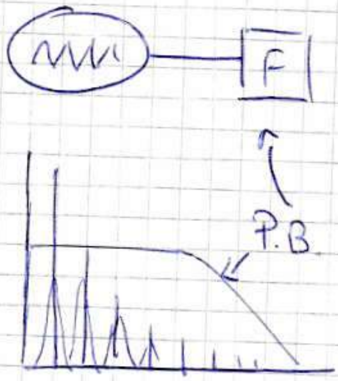
→ staticità delle t.d.F.



Il numero N dipende dalla frequenza f, ma ipotizziamo $32 = N$, con 32 oscillatori e amplificatori.
Il problema è che così ho bisogno, per suonare un'altra nota, devo avere altri 32 oscillatori.
Il numero di risorse richieste è quindi molto grande

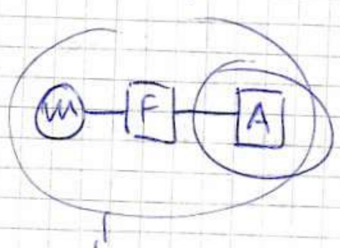
Sintesi sottrattiva

→ generiamo un'onda rettangolare, triangolare, a dente di sega.
Questi segnali hanno spettri come $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f^2}$, ...



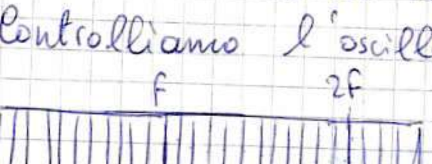
Faccio passare il mio segnale in un filtro, in modo da ridurre le ampiezze non volute

con freq. di taglio "spostabile".
Partendo da una qualsiasi forma d'onda, otterrò sempre una sinusoide, avendo tagliato tutte le frequenze più alte.



per ogni nota!

A seconda della nota da suonare, deve variare la f dell'oscillatore.
Controlliamo l'oscillatore in tensione



$$f = \alpha e^{V/V_0}$$

$$V_0 = \frac{1}{\ln 2}(V' - V)$$

Lezione 10 : 24/05/2013

Battimenti, suoni di Tartini || Suoni.

↳ **Fondamentale mancante**

Frequenze

$1 \to 2 \to 3 \to 4$

ok ok

$1 + 1{,}10$ No, non va bene

$1 \to 2$ ottava

$2 \to 3$

ragione $\frac{3}{2}$

$1 ; \frac{3}{2} ; \frac{9}{4} ; \frac{27}{8}$

1 2

riporto la note nell'ottave

Quando abbiamo fatto 12 note, avremo una cosa molto vicina ad 2, ma non proprio.

$1 ; \frac{3}{2} ; \frac{9}{8} ; \frac{27}{16} ; \frac{81}{64} ; \frac{243}{128} ; \frac{729}{512} ; \left(\frac{2187}{2048} \ldots \right.$

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^6} = 2{,}0273 \quad \left(\text{non è possibile che } \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m \ldots \right)$$

$$\hookrightarrow \frac{3^{12}}{2^{18}} = 1{,}01364 \Rightarrow \text{coma pitagorico}$$

Questo processo genera il circolo delle quinte

Tra $\frac{9}{8}$ e $\frac{27}{16}$: rapporto di $\frac{3}{2}$

Problema: $1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128}, 2$

↳ la scala non si chiude : c_p

la scala non ha il valore $\frac{5}{4}$ (al posto di $\frac{81}{64}$ .. $\frac{81}{80} = c_s$)

Modifichiamo leggermente le quinte in modo da far suonare bene le terze.

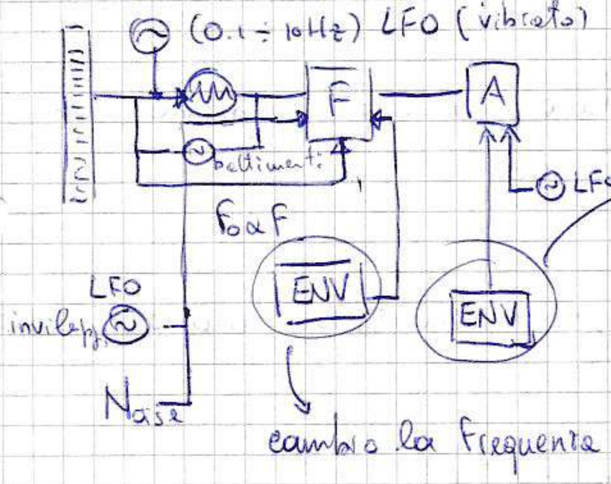
Purtroppo il problema delle partenze resta. Si risolve con il temperamento equabile:

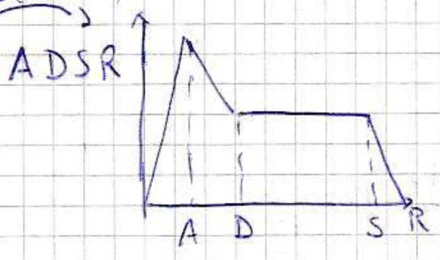
$1 \quad 1\alpha \quad \ldots \quad 2 \quad 2\alpha$ ↗ Faceva schifo a tutti, ma alla fine ha vinto.

Intervallo $\alpha = \sqrt[12]{2}$

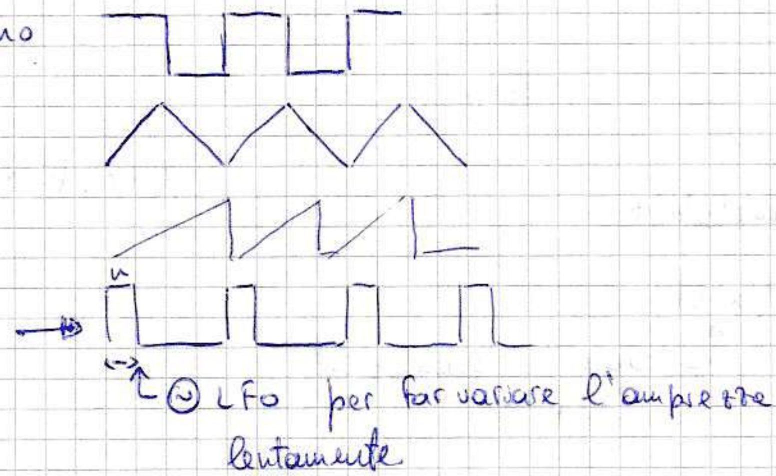
Altri criteri per fare le scale $\begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases}$ minimizzare il χ^2.

Ulteriori modifiche $\rightarrow$ ulteriore oscillatore per rendere più realistico il suono

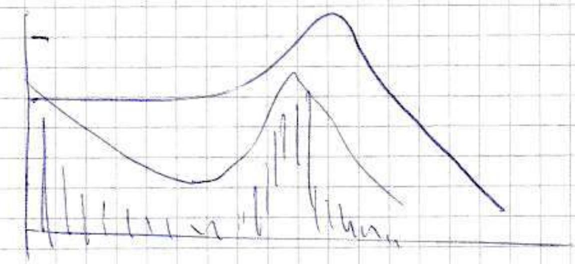




Le forme facili da generare sono



Il Filtro in realtà ha comunque una f. di risonanza, con un picco nella risposta. Così posso far variare molto ~~la~~ il timbro



Un altro metodo di generazione dei suoni $\Rightarrow$ $x_1(t) \otimes x_2(t)$

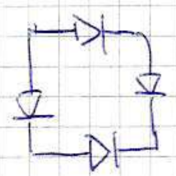
$\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) \Rightarrow \begin{matrix}\omega_1 - \omega_2 \\ \omega_1 + \omega_2\end{matrix}$

E se fossero forme d'onda casuali?

$\sum \cos(\omega_n t) \quad \sum \cos(\omega_n t)$

$\downarrow$

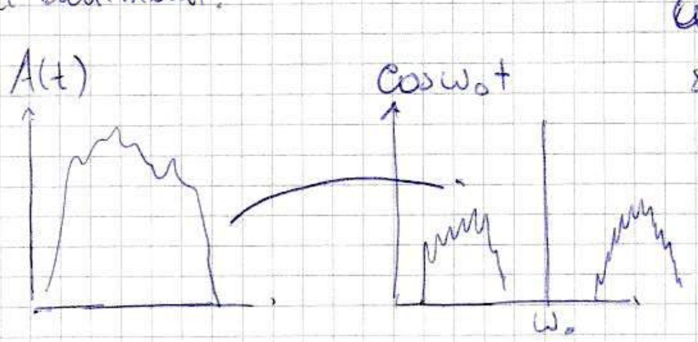
modulatore ad anello
Ring Modulator



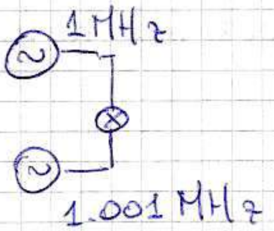
Se $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{n}{m} \Rightarrow$

Otteniamo facilmente una modulazione d'ampiezza, inserendo una $A(t)$ lentamente variabile: $A(t) \cos \omega t$. L'aspetto fisico ricorda il fenomeno dei battimenti.

Quello che si fa così è spostare tutto il blocco di A attorno alla frequenza ω_0. Funzionamento del Theremin.



Il Theremin utilizza due oscillatori



$F = F_1 \; f_2$ — f_1 varia perché facciamo una capacità con mano ed antenna

Implementazione digitale Yamaha

$$A\cos([\omega + f(t)]t)$$

$$A\cos(\omega t + I f(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(I)\cos(\omega \pm n\omega' t)$$

$\uparrow$

$\cos\omega' t$

Altri filtri sono quello granulare

Wavetable

$F(x(t))$

$\uparrow$ magari è campionato