Corda Vibrante

L'equazione delle onde è : $\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}}$ $\quad \phi = F(x-ct) + G(x+ct)$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho_e}}$$

Cosa accade ad onde che si propagano nella stesse spazio?
↳ Sovrapposizione lineare ⇒ interferenze → stessa λ, diversa c.
⇒ battimenti → diverse λ, stessa c

Su una corda, vedremo che un impulso viaggia a velocità $c = \sqrt{\frac{T}{\rho_e}}$

La riflessione da una estremità fissa comporta uno sfasamento di π, quella da una estemità libera non comporta alcun cambiament

In generale, la riflessione delle onde avviene all'interfaccia tra due mezzi: $\left.\begin{cases}\lambda f = c_1 \\ \lambda f = c_2\end{cases}\right)$ cambia la c

Eqn. della corda vibrante

Nel caso più generale, è data da una somma di modi:

$$y(x,t) = \sum_n \underset{\downarrow \atop \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}(k_n x)}{S_n(x)}\, T_n(t) \qquad T(t) = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t$$

$$\omega_n = \frac{nc\pi}{L} = n\omega_1 \quad \text{con} \quad \omega_1 = \frac{\pi}{L}c = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho_e}}$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Leggi di Mersenne
① la frequenza di oscillazione di una corda è inversamente proporzionale alla sua lunghezza
② prop. alla radice della forza
③ inversam. prop. alla radice della densità lineare

↳ $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho_e}}$

Ovviamente tutto questo ha senso nelle assunzioni di D'Alembert... ma tutto funziona approssimativamente per corde anche non uniformi:

$\rho_e(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ⇒ l'equazione non è più lineare, e tutto funzione solo se $\rho_e(x) = \rho_e^{(0)}\left(1 + \alpha\frac{x}{L}\right) \Leftrightarrow \alpha$ "piccolo"

In queste ipotesi potremmo fare espansioni... Un α piccolo indica solo imperfezioni

Altre due assunzioni incompatibili tra loro sono:

① Corda inestensibile

② Oscillazioni puramente trasversali.

Questo perché una corda a riposo lunga l, non può essere messa in oscillazione senza variarne la lunghezza.

Indicando con η_x, η_y, η_z gli spostamenti nelle 3 direzioni, allora:

$$c_T^2 \frac{\partial^2 \eta_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta_y}{\partial t^2} \; ; \quad c_l^2 \frac{\partial^2 \eta_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta_x}{\partial t^2} \; ;$$

$$c_T^2 = \frac{T}{\rho_e} \; ; \quad c_l^2 = \frac{\overset{\text{modulo di Young}}{\overset{\uparrow}{Y}}}{\rho \rightarrow \text{densità}}$$

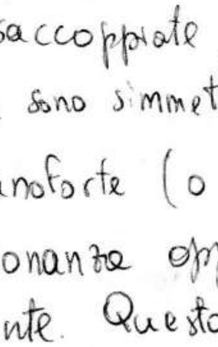
Deve ovviamente essere sempre $\left| \frac{\partial \eta_i}{\partial x} \right| \ll 1$

Quindi il risultato sono le solite equazioni di D'Alembert, con però componenti anche lungo x (lungo z è identica ad y). Le onde lungo x e lungo y si propagano a velocità diversa.

① Velocità diverse implicano frequenze diverse ⇒ perturbazione dell'armonicità. (Normalmente comunque quelle lungo x possono essere trascurate).

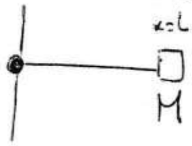
② Le due componenti x ed y non sono indipendenti, poiché appena allunghiamo lungo la y cambia anche la x.

Lungo z in linea di principio avremmo lo stesso moto che lungo y, eppure questo sarà vero solo nell'ipotesi di corda perfettamente simmetrica. Se la corda non lo è, avremmo componenti diverse, che al prim'ordine sono disaccoppiate, ma ad ordini successivi... non è garantito! I modi trasversi non sono simmetrici, e quindi uno si attenua prima dell'altro. Le corde di un pianoforte (o di una chitarre) possono oscillale parallelamente alla cd. risonanza oppure ortogonalmente. Questi due modi saranno attenuati diversamente. Questo è evidente per un pianoforte, dove lo smorzamento avviene come due esponenziali decrescenti, di cui una più rapida: i due modi di polarizzazione trasversali producono diverse costanti temporali.



nora abbiamo studiato il caso di una corda che oscilla tra due estremi fissati, perché in questo modo l'analisi è molto semplice. Tuttavia, la vibrazione di una corda di chitarra produce un suono debolissimo. Perché? Perché la vibrazione prodotta genera onde in fase e controfase ⇒ due sorgenti in opposizione di fase quasi nello stesso punto si cancellano vicendevolmente. Pertanto serve una cassa di risonanza.

Immaginiamo d'avere una corda fissa da una estremità e dall'altra avente una massa M grande ma finita.



$$F = -T\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=L} = M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\Big|_{x=L} \quad ②$$

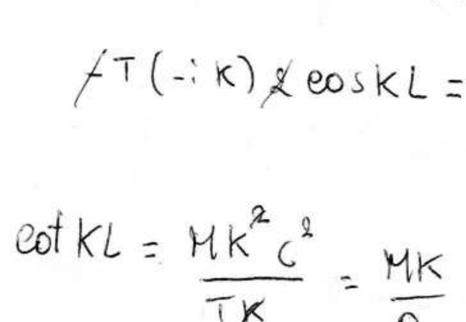
Onda che si propaga verso dx + verso sx: $y(t) = Ae^{i(\omega t-kx)} + Be^{(\omega t+kx)}$

① $y(0,t)=0$

② $-T[A(-ik)e^{ikL} + Bike^{ikL}]\cancel{e^{i\omega t}} = -M\omega^2(Ae^{-ikL} + Be^{ikL})\cancel{e^{i\omega t}}$

$\cancel{-}T(-ik)\cancel{2}\cos kL = \cancel{-}\omega^2 M(-\cancel{2}i)\,\text{sen}\,kL \Rightarrow \boxed{\cot kL = \frac{M\omega^2}{kT}}$

$\cot KL = \frac{MK^2c^2}{TK} = \frac{MK}{\rho_e} = \boxed{\frac{M}{m}LK = \cot KL}$ Dobbiamo quindi risolvere questa equazione in KL



Quindi lo spettro non è più armonico, ma è tanto più inarmonico quanto più piccola è M.

N.B.: cosa abbiamo cambiato? La corda è ancora ideale, però il supporto non è più fisso.

Il fatto di avere un supporto non fisso da un lato crea inarmonicità, dall'altro permette ai suoni di propagarsi. Tuttavia, questo fenomeno causa perdite i energia in maniera abbastanza rapida. (diff. tra chitarra acustica ed eltrica.. La chitarra necessita della cassa di risonanza, mentre la chitarra eltrica no! Infatti lo spettro della chit. elettrica è molto più armonico, oltre d avere una durata maggiore). La perdita di energia nella corda sarà iamente esponenziale $E = E(0)e^{-t/\tau(\omega)}$

① $\tau(\omega)$
② Varie componenti
③ τ_s, τ_a, τ_c

Fatto di avere una $\tau(\omega)$ implica uno spettro che varia nel tempo, poiché lcune freq. si smorzano prima.

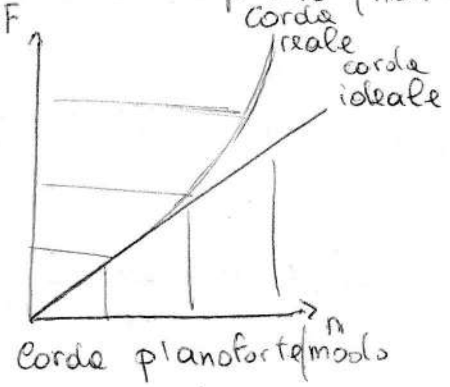
La presenza del supporto introduce una costante di tempo che va come $\frac{1}{\omega^2}$ - l'aria introduce poi un altro valore τ_a che può essere modellizzato ad alte frequenze come $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ (sopra una ω_c)

Il terzo meccanismo è invece dovuto alla struttura molecolare della corda. Una corda non ideale è un oggetto plastico, soggetto a deformazione. Questo meccanismo comporta un $\tau \sim \frac{1}{\omega}$.

I tre meccanismi, indipendenti tra la loro, causeranno attenuazione separatamente: $E = f_s + f_a + f_c = \frac{E}{\tau_s} + \frac{E}{\tau_a} + \frac{E}{\tau_c} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_c}\right)}$

Un discorso qualitativo già ci fa capire che a seconda dello strumento un tipo di attenuazione sarà dominante rispetto all'altra. Inoltre a seconda delle tipologie di corda avremo attenuazioni diverse. Una corda di nylon, ad e., avrà τ_c alto, mentre una d'acciaio ha τ_a dominante. Una chitarra con corde d'acciaio ha un suono più acuto.

Una corda reale, inoltre, presenta un diametro ed una masse finite, pertanto altera lo spettro (non è più armonico).



Corde pianoforte modo

In uno strumento armonico, la f. n.ro venti dovrebbe ~~avere~~ essere 20 volte la fondamentale: si vede bene che non è così, ma sembra quadratica. Per dare un'idea, la 14 parziale ha la frequenza che dovrebbe avere la 15.

Abbiamo accennato prima al comportamento della chitarra elettrica. Analizziamone ora il funzionamento.

Il meccanismo con cui una c. e. genera il suono è rappresentato da un pick-up, formato da un magnete permanente avvolto in una bobina. Sopra c'è la corda (metallica) che vibra ⇒ produce una f.e.m. variabile nel pick-up. La forma della f.e.m è simmetrica rispetto alla oscillazione della corda, pertanto la f. di base generata è il doppio della f. di oscillazione della corda. Quello che conta è la velocità con cui la corda si muove. ~~per cui~~

In generale quindi, la chitarra elettrica è più "ideale" ed armonica della chitarra acustica. Tuttavia, essendo elettrica, avrà rumore: per questo è stato introdotto l'humbucking, che utilizza due bobine ed elimina il rumore a 50 Hz.

Oggetti bidimensionali

Finora, abbiamo sempre trascurato quello che accade ad oggetti vibranti 2D (come la cassa di una chitarra). Anche questi vibrano ed hanno modi di vibrazione, che però non sono armonici.
I vari modi sono visibili mediante fotografie

41Hz

68Hz

73Hz

Le righe sono l'equivalente dei nodi della corda.
La presenza della cassa armonica altera quindi l'armonicità dello strumento

Analizzare matematicamente questo oggetto è molto complicato, e poi non solo, accoppiando la parte superiore della cassa con quelle laterali ed inferiore cambia gli autovalori... inoltre c'è anche l'aria che resiste a compressioni e rarefazione.
La cassa quindi funge da risuonatore, ed inoltre altera lo spettro non variandone però l'armonicità.
Nella chitarra, un meccanismo importante di perdita dell'energia è rappresentata dal dito, perché il capotasto rende il supporto rigido ma non troppo. Il dito è ancora più importante in altri strumenti, senza capotasti, come il basso ⇒ causa attenuazione maggiore.
Gli strumenti ad arco che infatti non hanno capotasti presentano un modo del tutto diverso di immettere energia (archetto).

Strumenti a corda

Clavicordo: è formato da corde che vengono eccitate mediante una lama metallica che la colpisce e resta lì, facendo da meccanismo che fornisce energia e da strumento per determinare la lunghezza della corda.
In questo modo, posso in linea di principio con una corda sola fare tutte le note, con lo svantaggio che il suono prodotto è debole (strumento da camera / studio)

lavicembalo: ha un modo di eccitare le corde che somiglia ad una chitarra, ovvero pizzicando le corde. Questo avviene grazie l plettro, che mediante la pressione del tasto corrispondente viene messo in moto e pizzica la corda.

Il clavicembalo è quindi uno strumento a corde pizzicate come l'arpa, uno strumento solista e d'accompagnamento. Può suonare tante note assieme

Pianoforte: corde percosse da martelletto, con quindi possibilità di regolare il volume. Nelle note basse è presente una corde per nota, mentre quelle alte saranno due o tre per nota. Questo perché vogliamo fare note allo stesso volume => note alte hanno corde più sottili (e più corte) In questo modo possono ancora essere considerate ideali.

Anche la struttura della cassa è importante... il materiale utilizzato e la forma condizionano l'armonicità. Quello che serve è un legno totalmente uniforme, oppure totalmente isotropo (magari plastico). In parte, per via del legno, possiamo caratterizzare il pianoforte.

Il martelletto colpisce la corda ad $\frac{1}{7}$ della sua lunghezza, in modo da eliminare la 7^a armonica, mentre nelle corde alte ad $\frac{1}{20}$.

Il rapporto tra la frequenza della n-esima armonica e la fondamentale moltiplicata per n è detto rapporto di inarmonicità. Questo rapporto è proporzionale al raggio della corda. Le corde più basse pertanto sono costituite da più corde intrecciate, piuttosto che da una singola corda spessa. In questo modo possiamo ottenere una sola corda pesante, con inarmonicità minore (?)

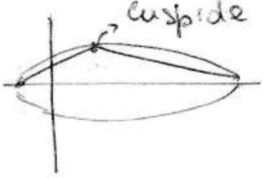
Il pianoforte presenta un meccanismo complicato per percuotere la corda

Il pianof. inoltre presenterà uno spettro per ogni nota. È abbastanza evidente che anche spettri a frequenza multipla delle armoniche fond. sono completamente diversi. Anche l'evoluzione temporale è completamente diverso. Addirittura, l'energia per modo può calare, per poi isalire! Questo perché ci sono tempi di decadimento diversi, dando rigine a fenomeni complicati. Inoltre, questi decadimenti dipendono dal olume, non sono tutti più alti o più bassi in relazione al volume.

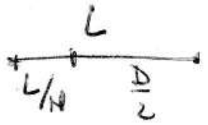
Arpa: presenta dei pedali per cambiare la tensione delle corde e quindi le note prodotte.

Strumenti ad arco

Presentano un modo di eccitazione particolare. Il generatore è sempre la corda, fissata tra ponticello e dito, e poi è sempre presente la cassa armonica costituita da tre accoppiatori. Il metodo con cui forniamo energia è l'archetto, che sfrutta le proprietà dell'attrito. L'archetto si aggancia alla corda e la tira, finché, ad un certo p.to, la corda è talmente tesa che il coefficiente d'attrito non riesce più a tenerla ferma e quindi inizia a scivolare, tornando all'equilibrio, e poi scorre finché non viene di nuovo agganciata all'archetto. Questo moto è detto moto di Helmotz → scivolamento ed adesione!



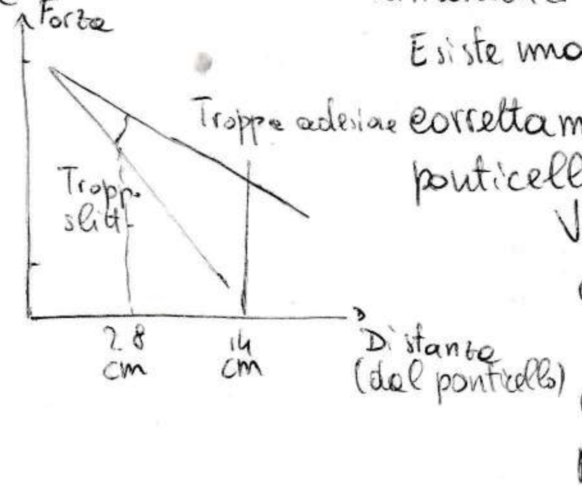
Il tempo di adesione è maggiore del tempo di scivolamento. C'è un legame tra la velocità della cuspide lungo la corda e la frequenza generata:



$$\begin{cases} c = 2Lf & \text{velocità cuspide} \\ D = 2L\,\frac{n-1}{n} & \text{percorso cuspide} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{t = \frac{D}{c} = \frac{n-1}{nf}} & \text{tempo adesione} \\ \boxed{A = v_a t = v_a\,\frac{n-1}{nf}} & \text{Ampiezza dell'osc.} \end{cases}$$

Quindi l'ampiezza dipende drasticamente da n...

Questo è il modo con una singola cuspide, ovviamente quelli a più vertici generano le altre armoniche.



Esiste una banda di forza da applicare per suonare correttamente il violino in f.ne della distanza dal ponticello.

Vari modi di suonare il violino:

col legno ⇒ percuotendo la corda col retro dell'archetto

collé ⇒ oscillazioni brevi

pizzicato ⇒ impulsivo

spiccato ⇒ l'archetto rimbalza sulla corda producendo una serie di note brevi

Sul ponticello: irregolare con più armoniche } la differenza è dovuta alla diff. del punto di applicazione della forza
Sul tasto: debole, poche armoniche

Tremolo -> varia la dir. del moto
Vibrato -> varia la lunghezza della corda

Onde di torsione

{la velocità relativa tra archetto e corda presenta una componente rot.}

Contribuiscono al suono generato dal violino (10% del moto del violino)
Quello che succede è che i moti a frequenze diverse dovrebbero avere spettri armonici.
Il violino è quindi formato da una corda, un ponticello ed un manico per fissare la corda
↳ oggetto di legno per trasmette la vibrazione al piano.

La parte superiore della cassa armonica è poi connessa alla parte inferiore mediante l'aria

Alla fine, quindi, la corda, urtando il ponticello, trasmette la vibrazione al cassa armonica (I oscillatore), che la trasmette all'aria (II osc.) ed al fondo della cassa (III osc.). Il minimo da fare quindi per modellizzare un violino è avere un generatore + 3 oscillatori, le cui risonanze determinano le caratteristiche del violino. In più ci sono altre risonanze (legno).
Per il violino esistono alcune corde chiamate "note del lupo", in cui la corda ed il corpo del violino hanno la stessa impedenza.
Questo può essere visto come due oscillatori accoppiati => supporti rigidi (1) no accoppiamento.

(1) quanto rigidi dipende dalla frequenza. Ad alcune frequenze il suono è trasmesso bene, ad altre male. Ovviamente, con il suono trasmesso male al ponticello, la corda sarà molto armonica, mentre per una buona trasmissione perdiamo armonicità.
Se suoniamo la corda ad una f. di risonanza della cassa e della corda, l'energia passa immediatamente alla cassa, dissipandosi.

Strumenti a barra

Hanno uno spettro inarmonico .. quindi ? Lo xilofono, la marimba come fanno Strumenti così mediante tubi di diversa lunghezza posso fare diverse note, opp tenendo sospesa la barra mediante un punto di sospensione Tutti questi strumenti sono percussivi. Questo perché vogliamo che le parziali superiori (inarmoniche) si smorzino velocemente . Inoltre possiamo fare una serie di accorgimenti che rendono lo spettro "quasi armonico" -> aggiusto selettivamente le frequenze . Ad esempio $f \rightarrow \boxed{2.3 f} \rightarrow$ circa armonica.

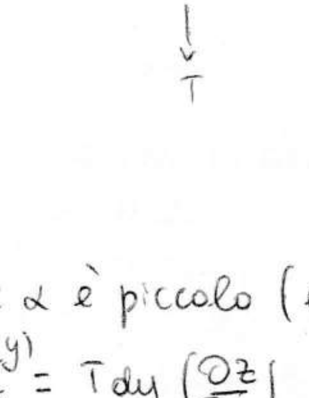
Ad esempio, possiamo variare lo spessore della barra in modo da migliorare la armonicità ($f \rightarrow 2.1 f$). In questo modo il nostro orecchio può ancora riconoscere una nota, perché magari abbiamo uno spettro quasi armonico o con poche componenti fuori armonia.

In pratica, nello xilofono e nelle marimba, la prima parziale è ①:③, ①:④. Possiamo agire un po' empiricamente per aggiustare le cose.

Oggetti bidimensionali

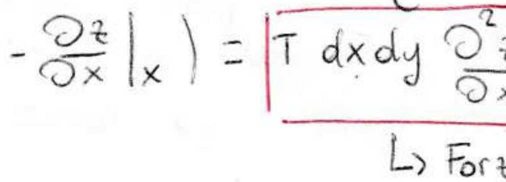
I tipici oggetti bidimensionali sono membrane, oggetti flessibili che hanno una forma definita solo perché tenuti alle estremità (~ corde bidim.) e le piastre (analogo 2D delle barre).

Prendiamo una membrana quadrata, soggetta ad una tensione T



Data la densità superficiale σ, avremo nell'elementino:
$dm = \sigma\, dx\, dy$

Un oggetto di questo tipo presenta una posizione di equilibrio (tutto piatto) e vibrazioni schematizzabili mediante una flessione della membrana lungo z:



Per cui la forza lungo z (di richiamo) è:

$$\boxed{F_z = -T\, dy\, \text{sen}\alpha - T\, dy\, \text{sen}\alpha'}$$

Se α è piccolo (ed anche α') : sen α ~ tg α => derivata. Pertanto:

$$F_z^{(y)} = T\, dy \left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x+dx} - \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x} \right) = \boxed{T\, dx\, dy\, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \Rightarrow \text{n.b. : } y \text{ è fisso qui.}$$

L> Forza dovuta alla tensione lungo x

Analogamente, nell'asse x: $\boxed{F_z^{(x)} = T dx dy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}$ → Forze dovuta alla tensione lungo y

Da F=ma ⇒ $\boxed{T dx dy \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \sigma dx dy \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}}$

Questa è un'equazione armonica, con una $c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$.

Se poniamo $z = X(x) Y(y) T(t)$:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right) = -\omega^2$$

↳ ipotizzando sol. armoniche.

→ ancora, armoniche (anche nello spazio)

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k^2 \Rightarrow \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = k'^2$$

Quindi, le soluzioni cercate hanno:

$T(t) = F\cos(\omega t) + G\,\mathrm{sen}(\omega t)$

$X(x) = A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx)$

$Y(y) = C\cos(k'y) + D\,\mathrm{sen}(k'y)$

Mancano le condizioni a contorno:

$z(x=0, y, t) = 0 \Rightarrow A = 0$; $z(x=L_x, y, t) = 0 \Rightarrow B\,\mathrm{sen}(kL_x) = 0$

$z(x, y=0, t) = 0 \Rightarrow C = 0$; $z(x, y=L_y, t) = 0$ $D\,\mathrm{sen}(k'L_y) = 0$

In sintesi quindi:

$$\begin{cases} kL_x = n\pi \\ k'L_y = n\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} X(x) = B\,\mathrm{sen}\,kx \\ Y(y) = D\,\mathrm{sen}\,k'y \end{cases}$$

Pertanto, otteniamo:

$$\boxed{z(x,y,t) = B\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) D\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right)\left[F\cos\omega t + G\,\mathrm{sen}\,\omega t\right]}$$

La cosa interessante è il legame tra le costanti:

$$\omega^2 = \underbrace{(k'^2 + k^2)}_{\text{forzati}} c^2 = c^2\left(\frac{m^2\pi^2}{L_y^2} + \frac{n^2\pi^2}{L_x^2}\right) = \text{costante}.$$

In una sola direzione (m oppure n nulli) lo spettro è armonico. Tuttavia, in generale, lo spettro non sarà armonico. Per (m, n) generici, non avremo nessuna rel. particolare tra la fondamentale e le parziali successive.

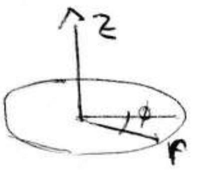
Prendiamo ora la stessa equazione vista però in coordinate cilindriche:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}\right)$$

[Timpano: tamburo accordabile]

membrana rotonda

Cerchiamo ora soluzioni del tipo: $z(t,r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)T(t)$



Inserendo questa $z(t,r,\phi)$ nell'equazione precedente otteniamo per il tempo il solito O.A. Per la $\Phi(\phi)$:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = -m^2\Phi \Rightarrow \Phi(\phi) = e^{\mp i\omega\phi}$$

Mentre per R, avendo fissato ω: $$\boxed{\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0}$$

Questa ha come soluzione le ~~Eq~~. di Bessel $\Rightarrow R(r) = J_m(kr)$.

Pertanto: $z(r,\phi,t) = J_m(kr)e^{im\phi}e^{i\omega t}$

Se R_0 è il raggio del tamburo, la condizione al contorno da imporre è:

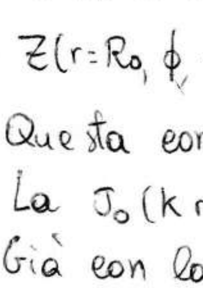
$z(r=R_0, \phi, t) = 0 \Rightarrow J_m(kR_0) = 0$

Questa condizione definisce i K, che dovranno essere t.c. $KR_0 : J_m(KR_0) = 0$.

La $J_0(kr)$, ad esempio, ha zeri a $x = 2.4, 5.52, 8.69, \ldots$ $[J_1 \to 3.83, 7.02, 10.17]$

Già con la J_0 non abbiamo uno spettro armonico.

Anche nel caso circolare quindi non otteniamo uno spettro armonico. Qualitativamente, se aggiungiamo un risuonatore alla membrana, le cose cambieranno ulteriormente. Nella campana infatti è presente l'aria, che offre una certa resistenza alla compressione ⇒ resiste di più ai modi che causano maggior variazione di volume.



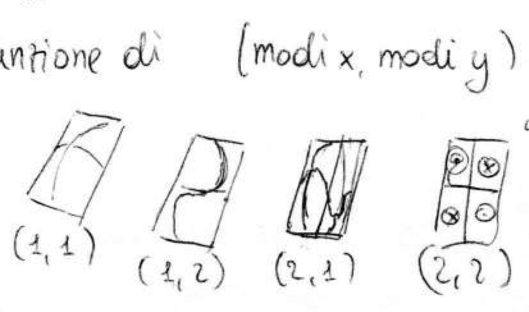
Valori delle f. del timpano accoppiato all'aria:

$$\begin{matrix} \omega = 0.85, & 1.51, & 1.99, & 2.44, & 2.89 \\ \wr & \wr & \wr & \wr & \wr \\ 1 & 1.5 & 2 & 2.5 & 3 \end{matrix}$$

frequenze quasi armoniche almeno nei termini iniziali

scala arbitraria

Modi di vibrazione di membrane quadrate possono essere schematizzati in funzione di (modi x, modi y)

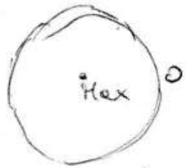


I vari modi di vibrazione. I numeri indicano il numero di ventri in ciascuna coordinata cartesiana. È interessante notare come, per membrane quadrate, il modo (1,2) sia formalmente identico al modo (2,1), avendo la stessa frequenza. Questo implica la presenza di moti degeneri, come avviene in M.Q. Inoltre la somma e la sottrazione di modi è ancora un modo di vibrazione della membrana

Nel caso di membrane rotonde, dobbiamo prendere come set (m, k) => nodi diametro e nodi circolari.

I nodi lungo il diametro sono fissati dagli zeri di $J_m(kr)$. Il modo fondamentale (0, 1) presenta l'unico zero della f.ne di Bessel sul bordo, non presenta diametri nodali ed ha un nodo circolare.

Corrisponde a colpire esattamente al centro il timpano, ed ha un'elevata efficienza => molto spostamento d'aria! Questo implica, d'altra parte, un rapido decadimento.

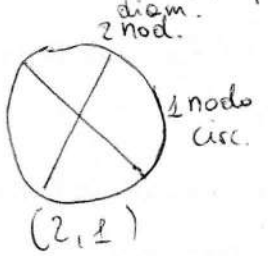


(0, 1)

$J_0(kr)$ con zero sul bordo.

(0, 1) è una radiazione di monopolo.

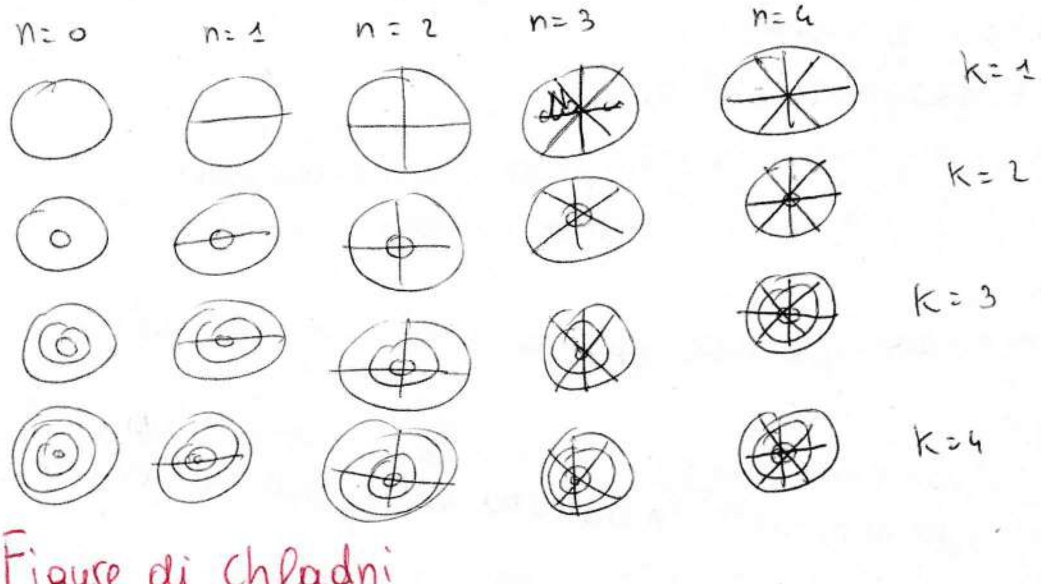
Il modo (2, 1) presenta due diametri nodali ~~nodi lungo una circonferenze~~ ed uno circolare.



(2, 1)

Il modo (2, 1) ha lunga durata nel tempo, corrisponde a radiazione di 4-polo.

I modi di vibrazione principali di una membrana circolare ~~principale~~, pur non formando armoniche, sono figure regolari:



N.B.: K divide in cerchi, n (o m) divide a fette!!!

Figure di Chladni

Le f. di Chladni sono ottenute dalla vibrazione di superfici meccaniche ricoperte di sabbia finissima. La sabbia si allontana dalle zone di maggiore vibrazione (ventri) e si raggruppa dove la vibrazione è nulla (nodi)

Le osservazioni di Chladni possono sintetizzare in 5 punti:

① Ogni ventre è separato da un altro ventre da una linea nodale
② Fissando più punti si ottengono figure diverse

③ La posizione delle linee nodali dipende dalla forma delle piastre, dal modo in cui vibrano e dalla frequenza.

④ A suoni più acuti corrispondono più linee nodali.

⑤ La stessa piastra posta in vibrazione nelle medesime condizioni produce sempre le stesse linee nodali.

Chladni verificò che ad uguali figure corrispondono uguali suoni, ma non è vero il viceversa (allo stesso suono possono corrispondere più figure)

Le condizioni a contorno possono modificare la presenza di nodi.

Il problema di correlazione figure = suono è stato posto anche nel 66 nello American Mathematical Monthly. Purtroppo, esistono forme isospettrali (92: Domini isospettrali e superfici via orbifold Rienmanniani).

Quindi, in sintesi, un oggetto bidimensionale è intrinsicamente non armonico e difficilmente calcolabile. Non è un problema quando lo usiamo come risuonatore, semplicemente cambia il timbro del suono (l'importanza di una armonica o altre), ma non può aggiungere frequenze.

Altri oggetti che possono essere bidimensionali sono campane, gong, piatti.

Una campana è sostanzialmente una piastra chiusa su se stessa.

Con le campane possiamo creare melodie, mediante vari espedienti. Queste possiedono simmetrie azimutale, per cui ci aspettiamo una invarianza per rotazione. Una campana reale, tuttavia, presenta delle imperfezioni: facendola suonare in un punto od in un altro otterremo due freq. molto simili ma non identiche ⇒ avrò battimenti (wowowo delle campane)