Fisica Musicale

Il legame musica-scienza era molto forte in passato. Ma poco ci importa... Pensiamo al primo argomento.

OSCILLAZIONI

Il suono è un'oscillazione (dell'aria), generata da una vibrazione meccanica, almeno fino all'inizio del '900 (1912).
Il theremin è stato il primo strumento musicale basato su principi non meccanici. (Elettronico)
Quindi, in ogni strumento, è necessaria, affinché avvenga una oscillazione, la perturbazione di questo.
Le oscillazioni poi, per ~~____~~ poter avvenire, necessitano di un mezzo dove siano presenti rigidità ed inerzia (caratteristiche fisiche)
Rigidità: legata alla forza di richiamo, tende a riportare il sistema nella posizione di equilibrio
Inerzia: tende a mantenere lo stato di moto dell'oggetto, ed è legato alla ~~densità~~ massa.
Rigidità ⊕ Inerzia causano oscillazioni
In una corda vibrante ad esempio, la velocità di propagazione è data da $c=\sqrt{\frac{T}{\rho_e}}$, dove $\begin{cases} T = \text{tensione} \Rightarrow \text{rigidità} \\ \rho_e = \text{densità lineare} \Rightarrow \text{inerzia} \end{cases}$
Per oscillazioni in una barra, avremo $c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ $E \rightarrow$ modulo di Young, $\rho \rightarrow$ densità.
In aria, avremo: $c=\sqrt{\frac{K}{\rho}}$.
Qualunque tipo di oscillazione meccanica ~~a~~ necessita di queste due caratteristiche.
Altre cose che possono "esserci o non esserci" causano deviazioni dal comportamento ideale. L'esempio tipico è l'attenuazione.
L'attenuazione causa smorzamento delle oscillazioni.

Diverse proprietà dell'attenuazione causano diversi suoni.
L'esempio tipico è la differenza che c'è tra chitarra e violino.
La chitarra si suona con le dita, il violino con l'archetto. La differenza fondamentale è nella presenza di fret metallici nella chitarra, mentre nel violino, la corda è tenuta ferma dalle dite.
L'archetto del violino immette costantemente energia, per ovviare all'attenuazione maggiore.

Punto di vista matematico

Dobbiamo partire da $F = ma = m\ddot{x}$
Ipotizziamo poi che la forza sia di tipo elastica, ovvero $-Kx$, quindi
$m\ddot{x} = -Kx$ è l'eq. dell'O.A. quindi con soluzione
$\boxed{x(t) = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t}$, dove $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

① Questa equazione può anche essere scritta come $\boxed{x(t) = C\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)}$
È una famiglia di funzioni che varia con C e φ.
② Ipotizziamo che il sistema sia lineare, ovvero che moltiplicate per una costante resta soluzione. Il problema è che il mondo è altamente N.L.

Più o meno comunque la linearità funziona. C è una costante fissata dalle condizioni al contorno, come anche φ (dip. dal tempo di inizio). Questo perché nella equazione armonica non compaiono parametri dipendenti dal tempo.
Un'equazione non lineare presenta potenze in x, $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ diverse da 1. Nel caso di equazioni non lineari poi, cade anche il pr. di sovrapposizione.
Una soluzione di un'equazione non lineare è del tipo $\boxed{x(t) = A(\omega)F(t,\omega)}$
Quindi la costante dipende dalla frequenza, non è semplicemente una costante. Questo sarebbe un problema, perché da un lato l'ampiezza dell'oscillazione dipenderebbe troppo dalla frequenza, oppure viceversa a seconda della forza impressa trovo una nota in uscita o un'altra.
La linearità invece garantisce che ad una sollecitazione a freq. fissa, la nota è sempre la stessa

L'oscillatore armonico ha un'importanza fondamentale in fisica. (2)
Infatti, qualsiasi sia l'espressione della forza $F(x)$, in prima approssimazione sarà sempre un O.A.: $\boxed{F(x) = F_0 + F_1 x + \frac{1}{2} F_2 x^2 + ..}$

Se analizziamo il potenziale invece, la condizione per avere un minimo è proprio che il potenziale sia quadratico (O.A.) $U = \frac{1}{2} k x^2$.

N.B.: Aristotele pensava che $F = m\dot{x}$ (effetto dell'attrito). In questo caso, ad una forza elastica avremmo avuto $-Kx = m\dot{x} \Rightarrow$ esponenziale decrescente, nessuna oscillazione!

x = sinusoidale $\Rightarrow \dot{x}$ = sinusoidale $\Rightarrow \ddot{x}$ = sinusoidale

Se abbiamo: $x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi) \Rightarrow \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$

L'energia cinetica vale: $E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

Mentre per l'energia potenziale abbiamo ovviamente
$E_p = \int_0^x k x' dx' = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi)$

Siccome $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $k = \omega^2 m \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi)$,
otteniamo $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) =$

$$\boxed{= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = E_{TOT}}$$

Quindi l'energia è quadratica nell'ampiezza e nella frequenza.
Un altro caso in cui abbiamo un'energia somma di due termini quadratici è il campo elettromagnetico $\Rightarrow$ parallelismo tra meccanica ed elettromagnetismo $\Rightarrow$ posizione, velocità $\Rightarrow$ campo elettrico e magnetico

Nota: def. valore RMS: $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = x_{RMS}$

Quando trattiamo equazioni lineari, possiamo usare fasori, cioè espressioni del tipo $x(t) = A e^{i(\omega t + \phi)}$, per poi ridurci alla parte reale nel calcolo dei V.M.

Il nome fasore deriva dall'equivalenza $x(t) \sim x(t)e^{i\phi}$.

Il problema è quando abbiamo oggetti N.L., ad esempio potenze.

$$x^2 = A^2 e^{i2\omega t} \Rightarrow \langle x^2 \rangle = A^2 \int_0^T \frac{e^{i2\omega t}}{T} dt = A^2 \int_0^T \frac{dt}{T} [i\,sen(2\omega t) + cos(2\omega t)] = 0 !!!$$

Non va bene, per fare quadrati devo tornare a prendere solo la parte reale. Infatti, la parte reale di un quadrato di un numero complesso non è la parte reale al quadrato. Quindi, per fare potenze, dobbiamo sempre usare seni e coseni.

Oscillatori smorzati

Se includiamo un altro termine nell'equazione del moto, negativo in quanto si oppone al moto: $\boxed{m\ddot{x} = -kx - R\dot{x}}$

$$\boxed{m\ddot{x} + kx + R\dot{x} = 0} \quad (1)$$

La soluzione più generale dell'equazione (1) è:

$$x(t) = Ae^{\gamma t}, \quad \gamma = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \text{dove } \beta = \frac{R}{2m} ; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A seconda del segno di $\beta^2 - \omega_0^2$ avremo vari casi.

ⓐ Se $\beta > \omega_0$ abbiamo un sovrasmorzamento, dato da due esponenziali decrescenti: $\boxed{x(t) = Ae^{\gamma_1 t} + Be^{\gamma_2 t}}$

ⓑ $\beta < \omega_0 \Rightarrow$ sottosmorzamento, abbiamo oscillazioni.

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)}$$ dove la ω non è ω_0

ⓒ $\beta = \omega_0$. Qui non avvengono oscillazioni, ma uno smorzamento critico. È la soluzione che va a zero più rapidamente.

La b è la regione che ci interessa per strumenti musicali!

Oscillatori forzati e smorzati II

Abbiamo visto che l'equazione è del tipo:

$\boxed{m\ddot{x}+R\dot{x}+kx=0}$ Abbiamo visto poi: $\beta=\frac{R}{2m}$ e $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$x(t)=Ae^{-\beta t}\cos(\omega_d t+\phi)$ $\quad \beta<\omega_0$

Nel caso di sottosmorzamento. Il fatto che $\beta<\omega_0$ si traduce con "smorzamento piccolo".

Definiamo il fattore di qualità: $Q=\frac{\omega_0}{2\beta}=\frac{m\omega_0}{R}$ $\begin{cases} >\frac{1}{2} \Rightarrow \text{non oscilla} \\ <\frac{1}{2} \Rightarrow \text{oscilla}\end{cases}$

Altra interpretazione del Q si ottiene analizzando l'energia:

$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt}=\cancel{\frac{1}{2}}m\dot{x}\ddot{x}+\cancel{m}\,kx\dot{x}\equiv-R\dot{x}^2$ (da eq. moto)

Facciamo ora il rapporto tra l'energia media contenuta in una oscillazione e l'energia persa nel corso dell'oscillazione:

$$\frac{\langle E\rangle}{\langle\frac{dE}{dt}\rangle\frac{2\pi}{\omega_d}}=\frac{1}{4\pi}\frac{m\omega_d}{R}$$ che per $\beta\ll\omega_0$ è: $$\frac{\langle E\rangle}{\langle\frac{dE}{dt}\rangle\frac{2\pi}{\omega_d}}=\frac{Q}{4\pi}$$

Ovvero: $Q=\frac{\text{energia totale}}{\frac{\text{energia persa}}{\text{periodo}}}\,4\pi$

Possiamo poi chiederci il rapporto tra forza elastica e forza d'attrito:

$$\frac{kx_{MAX}}{R\dot{x}_{MAX}}=\frac{kA}{\omega_d AR}=\frac{k}{R\omega_d}\simeq\frac{m\omega_0}{R}=Q$$ quindi è sempre legato a Q.

hp: $\omega_d\simeq\omega_0$

Oscillatore Forzato

In un O.A. in cui è presente il termine dissipativo $R\dot{x}$, dopo un po' l'oscillazione si smorza. Se invece riforniamo continuamente di energia il sistema, mediante una forza esterna: $\boxed{m\ddot{x}+R\dot{x}+kx=f(t)}$

se ipotizziamo una forza $f_0e^{i\omega t}$, allora una soluzione particolare è: $x(t) = A e^{i\omega t}$.

Portando questa soluzione nell'equazione del moto, otteniamo:

$(-m\omega^2 + i\omega R + k) A e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$, da cui: $\boxed{A = \dfrac{f_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega 2\beta}}$

$\beta = \frac{R}{2m}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Notiamo quindi che la $A(\omega)$ presenta una risonanza per $\omega = \omega_0$, per andare a zero per $\omega \to +\infty$

Se riscriviamo la relazione $A(\omega)$ come: $\boxed{A = \dfrac{f_0}{i\omega Z}}$, $\dfrac{f_0}{i\omega} = \dfrac{m\ddot{x}}{i\omega} = m\dot{x}$

dove $\boxed{Z = R + i\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)}$ è l'impedenza meccanica del sistema

parte reale — parte immaginaria

Notiamo quindi l'analogia con l'elettromagnetismo:

$R \to R$ } parte reale

$L\omega \to m\omega$, $\frac{1}{C\omega} \to \frac{k}{\omega}$ } parte immaginaria

$\Rightarrow$ stesse equazioni, stesse soluzioni!

La definizione generale di impedenza meccanica è: $\boxed{Z = \dfrac{f_0}{\dot{x}} = \dfrac{f_0 e^{i\omega t}}{i\omega A e^{i\omega t}}}$

In generale, quindi, l'impedenza è complessa, con la parte reale che causa attenuazione e quella immaginaria che causa sfasamento.

Quindi è del tutto naturale porre l'analogia $F \leftrightarrow V$; $\dot{x} \leftrightarrow I$.

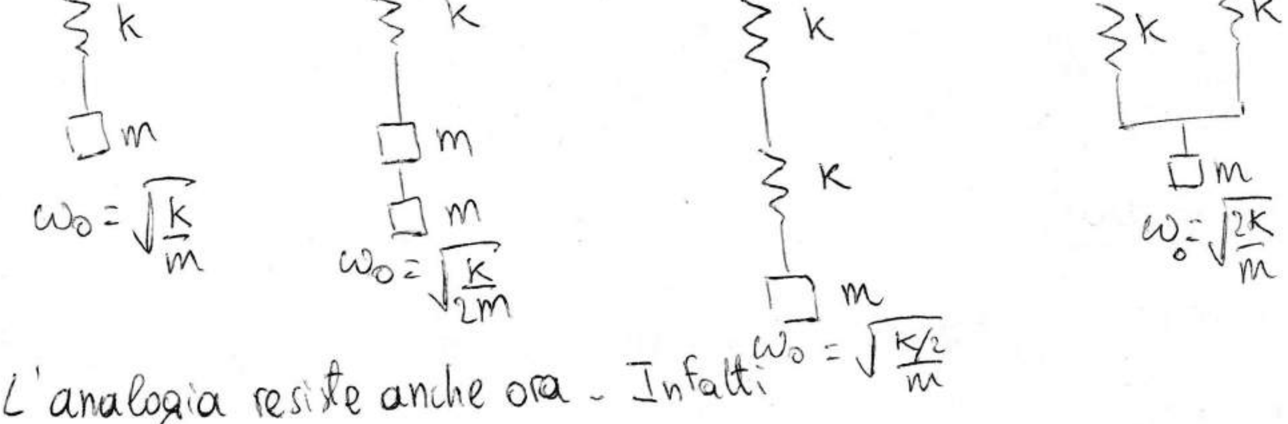
Pertanto, per completare l'analogia troviamo
- pile $\Leftrightarrow$ generatori di forze
- gen. corrente $\Leftrightarrow$ velocità costante

Un trasformatore invece mantiene costante il prodotto $P = V \cdot I$.

Un analogo meccanico deve tenere costante $P = F \cdot v \Rightarrow \boxed{\text{leva}}$

nalogie elettromeccaniche

Analizziamo ora il sistema massa molla, prima con una molla poi con due molle, in serie od in parallelo



L'analogia resiste anche ora. Infatti $\omega_0 = \sqrt{\frac{k/2}{m}}$

la massa, come l'induttanza, si oppone alle variazioni di velocità (corrente), mentre il condensatore accumula energia (carica), come una molla.

Il problema è che $m \leftrightarrow L$, mentre $C \leftrightarrow \frac{1}{k}$. Allora è chiaro che Due molle in serie corrispondono a due condensatori in parallelo, mentre due molle in parallelo sono come due condensatori in serie.

L'analogia è completa, valendo anche per l'energia:

$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \text{ (induttanza)} \\ E = \frac{1}{2} k x^2 \text{ (condensatore)} \end{cases}$$

$\omega \to 0 \Rightarrow$ ampiezza costante $\to x \sim F$

$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \ddot{x} \sim F$

$\omega \approx \omega_0 \Rightarrow \dot{x} \sim F$

per freq. molto sotto la risonanza, l'oggetto si comporta come una molla

Analisi spettrale

Definiamo t.d.F.: $\begin{cases} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{i\omega t} \, dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-i\omega t} \, d\omega \end{cases}$

Teorema di Plancherel - Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$\Rightarrow$ Proprietà di convoluzione $g(t) = \int f(u)\, h(t-u)\, du$

$\hookrightarrow g(\omega) = f(\omega)\, h(\omega)$

$\Rightarrow$ Derivata: $g(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} \hookrightarrow g(\omega) = (i\omega)^n f(\omega)$

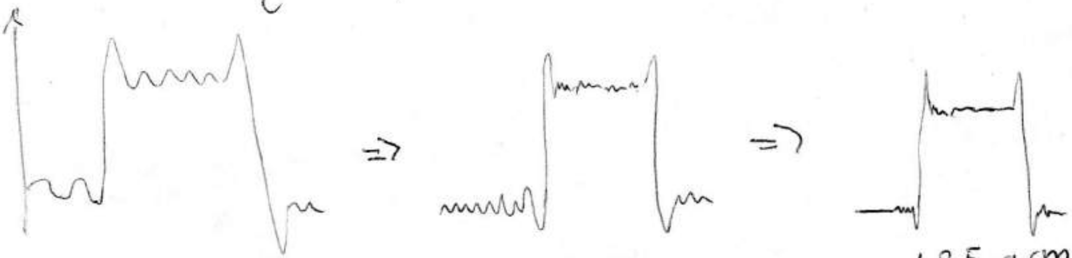
Composizione spettrale

Lasciamo perdere cose facili, pensiamo a fenomeni come il

Fenomeno di Gibbs

Il f. di Gibbs è relativo al modo in cui la t.d.F. analizza una funzione con discontinuità a salto. Infatti, nei pressi del salto, la somma parziale di Fourier ha grandi oscillazioni, che possono innalzare il valore della f.ne nel punto (overshoot). L'over-shoot è presente anche aumentando il numero di termini.

All'aumentare del numero di termini, quello che accade è che l'errore si riduce in larghezza, ma tende ad un'altezza fissata.



5 armoniche $\qquad$ 25 armon. $\qquad$ 125 armoniche

non solo!

Per l'onda quadra è possibile fare il calcolo esatto: il fenomeno di Gibbs è visto come la convoluzione dell'onda quadra con sinc x. (Corrisponde infatti ad un P.B.)

$\Rightarrow$ Il dislivello è: $f(x_0^+) - f(x_0^-) + 2a(0.089)$ $\begin{cases} \text{perché } \limsup S_N(f(x_N)) \le f(x_0^+) + a \\ \liminf S_N(f(x_N)) \ge f(x_0^-) - a \end{cases}$

$\downarrow$

La somma parziale si discosta dal valore "vero" della funzione

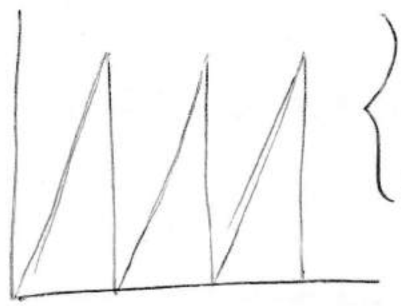
ANALISI IN FREQUENZA

La relazione tra frequenza e tempo è: $\Delta\omega\Delta t = 4\pi$, con tutte le conseguenze del caso. Pertanto già la durata di un suono fornisce indicazioni sullo spettro.
$$\boxed{\Delta\omega = \frac{4\pi}{\Delta t}}$$

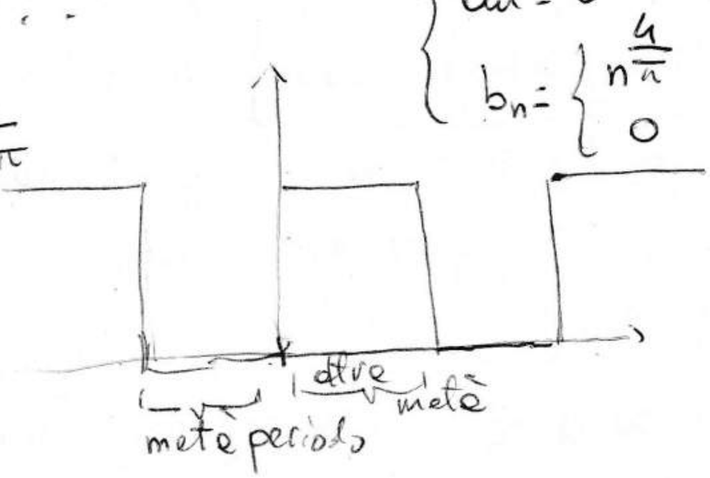
Ogni suono periodico ha uno spettro esprimibile in serie di Fourier
$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \Sigma[a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \operatorname{sen}(\omega_0 n t)]$$
ed uno spettro armonico può essere utilizzato per fare note ⇒

Spettro armonico = spettro discreto ed equidistanziato.

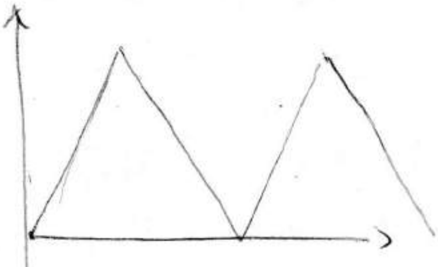
A seconda dello spettro possiamo ottenere dente di sega, onde quadre, triangolari...



$$\begin{cases} b_n = \frac{1}{n\pi} \\ a_n = 0 \end{cases}$$



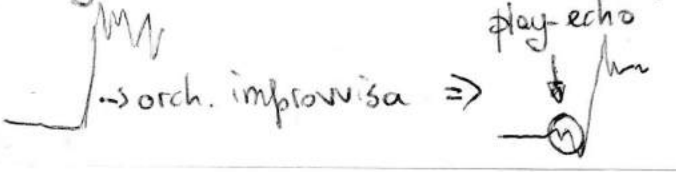
$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases} \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases} \end{cases}$$

Emerge immediatamente che per funzioni pari, avremo sviluppi pari (coseno); per f.ni dispari solo termini in seno.

Il fenomeno di Gibbs è presente anche nelle registrazioni, come play-echo:



→ per evitare il play echo si può fare partenza non a botto.

Alcune definizioni

Potenza di un segnale $x(t) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt = x^2_{RMS}}$

$\Downarrow$ "livello" è sempre un logaritmo

Livello di potenza $\rightarrow L = \log_{10}\left(\frac{W_1}{W_2}\right)$ perché il nostro orecchio risponde logaritmicamente.

[Bell] $\rightarrow$ serve una unità di riferimento

$dB \rightarrow 10\log\left(\frac{W_1}{W_2}\right) = 2\cdot 10\log\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$

$W = A^2$

$dB_V \Rightarrow 1V$

$dB_W \Rightarrow 10^{-12}W$ (minima pot. udibile)

$dB_P \Rightarrow 20\times 10^{-6} Pa = 20\mu Pa$

La differenza di due livelli è sempre un rapporto.

Nel dominio della frequenza, introduciamo lo spettro di potenza

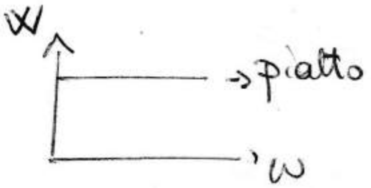
$x(\omega) \rightarrow$ $\boxed{W = \int_0^{\infty} S(\omega)\,d\omega \text{ dove}}$ $S(\omega) = X(\omega)X^*(\omega)$

Definiamo poi funzione di autocorrelazione di un segnale la quantità $\boxed{a(\delta) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+T/2} x(t)\,x(t+\delta)\,dt}$

Dice quanto (dopo un tempo δ), il segnale è ancora uguale al segnale di partenza. Se il segnale è periodico, ovviamente anche $a(\delta)$ è periodica.

Interessante: $\boxed{\mathcal{F}[a(\delta)] = S(\omega)}$ La f. d. F. della funzione di autocorrelazione è lo spettro del segnale. (Teorema di Wiener-Kintchine)

Rumori



Bianco

Generare rumore bianco: nel dominio temporale prendiamo un numero totalmente casuale.

Rumore Browniano - Marrone

È un random walk con $\langle x^2 \rangle = 0$. Più correlato del rumore bianco.
È una integrazione del rumore bianco $\rightarrow \left(\frac{1}{i\omega}\right) \Rightarrow \boxed{W \propto \frac{1}{f^2}}$

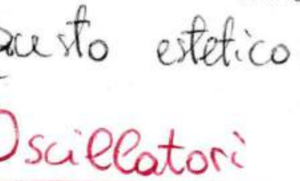
Rumore 1/f (rumore rosa)

Presenta caratteristiche intermedie → rumore scorrelato (piatto) ↕ $\rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)$ → rumore correlato $\left(\frac{1}{f^2}\right)$

Il rumore $\frac{1}{f}$ compare in Natura, in Elettronica, Statistica, Finanza.
Anche lo spettro delle canzoni è $\frac{1}{f_u}$!! (In linea generale).
Prendendo delle note scelte a "caso" rispettando i criteri per generare i rumori, abbiamo che solo generando rumore $\frac{1}{f}$ otteniamo melodie orecchiabili, in accordo col nostro gusto estetico.
Il rumore $\frac{1}{f}$ è presente in tutti i generi musicali. Questa casualità non è "casualmente" correlata, ma è dovuta al nostro gusto estetico.

Oscillatori

Partiamo dal caso armonico semplice, una forza elastica $F = -kx$, dove $x = l - l_0$, con però due masse A e B:



$$\begin{cases} m\ddot{x}_A + kx_A + k'(x_A - x_B) = 0 \\ m\ddot{x}_B + kx_B + k'(x_B - x_A) = 0 \end{cases}$$

Imponiamo che il sistema abbia soluzione: $\begin{cases} x_A = x_A(0)\, e^{i\omega t} \\ x_B = x_B(0)\, e^{i\omega t} \end{cases}$

ovvero, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} (\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{k'}{m}) x_A + \frac{k'}{m} x_B = 0 \\ (\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{k'}{m}) x_B + \frac{k'}{m} x_A = 0 \end{cases}$$

Imponendo il determinante della matrice dei coefficienti uguale a zero, otteniamo i modi normali:

$$(\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{k'}{m})^2 - (\frac{k'}{m})^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2k'}{m}} \end{cases}}$$

Se creiamo due nuove variabili:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_A + x_B \\ \bar{x}_2 = x_A - x_B \end{cases}$$

diagonalizziamo il sistema, ovvero disaccoppiamo le due equazioni:

$$\begin{cases} m\ddot{\bar{x}}_1 + \omega_1 \bar{x}_1 = 0 \Rightarrow \text{le due masse oscillano in fase} \\ m\ddot{\bar{x}}_2 + \omega_2 \bar{x}_2 = 0 \Rightarrow \text{le due masse sono in controfase} \end{cases}$$

I modi normali sono pari anche al numero di punti mobili

In un sistema dove è presente una forzante, ad esempio:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_A + kx_A + k'(x_A - x_B) = f_0 \cos(\omega t) \\ m\ddot{x}_B + kx_B + k'(x_B - x_A) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\bar{x}}_1 + \omega_1^2 \bar{x}_1 = \frac{f_0}{m} \cos\omega t \\ \ddot{\bar{x}}_2 + \omega_2^2 \bar{x}_2 = \frac{f_0}{m} \cos(\omega t) \end{cases}$$

Imponendo soluzioni periodiche: $\bar{x}_1(t) = A_1 \cos(\omega t)$:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{f_0}{m(\omega_1^2 - \omega^2)} \cos\omega t \quad \text{dove } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \bar{x}_2 = \frac{f_0}{m(\omega_2^2 - \omega^2)} \cos\omega t \quad \text{dove } \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2k'}{m}} \end{cases}$$

Queste divergono per l'assenza nell'equazione del moto del termine di smorzamento.

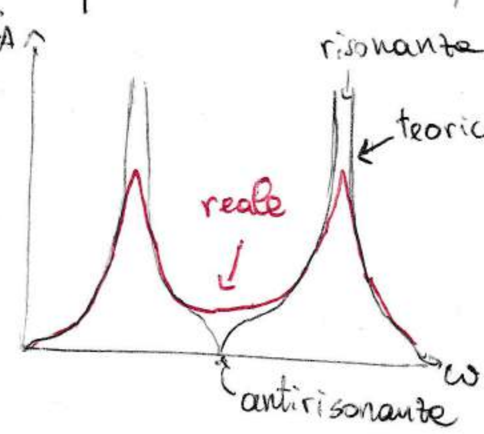
E passando di nuovo alle coordinate $x_A(t)$, $x_B(t)$

$$\begin{cases} x_A(t) = \frac{\omega_1^2 - \omega^2 + k'/m}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \frac{f_0}{m} \cos\omega t \\ x_B(t) = \frac{k'/m}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \frac{f_0}{m} \cos\omega t \end{cases}$$

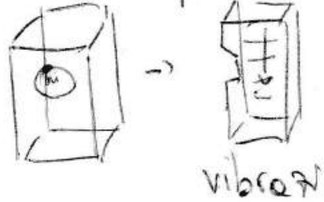
Osserviamo che $\exists \omega_0 : x_A \equiv 0$.

$$\omega_0 = \omega_1^2 + \frac{k'}{m}$$

Per questo valore di ω, abbiamo il fenomeno dell'antirisonanza (7)



Un oggetto reale sarà formato da tanti oscillatori accoppiati. Per quanto complicato può essere, sarà sempre formato da picchi e valli in frequenza.
Tutti gli oggetti meccanici presentano ovviamente fenomeni di risonanza ed antirisonanza, che nel caso acustico sono dannose. Come fare per evitarle? Possiamo accoppiare all'oscillatore un altro oscillatore che vada a cancellare la risonanza ed antirisonanza presente.
Il tipico esempio è la cassa acustica, in cui l'aria si sposterà alla frequenza di risonanza, ovvero quella della scatola



Ha una f. di risonante
vibrazione dell'aria

Regolando le dimensioni dello oggetto, posso regolare questa risonanza, ma posso ulteriormente ridurre gli effetti della risonanza inserendo un secondo foro che causi una risonanza in controfase

l'aria oscilla dentro la cassa, ma non c'è risonanza

Principio di Rayleigh

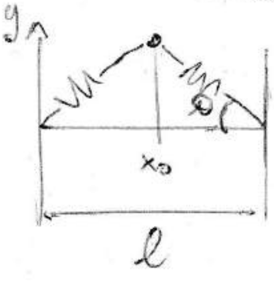
Il comportamento di un singolo oscillatore è noto. Il comportamento di tanti oscillatori accoppiati è difficile da determinare:
$\frac{1}{2}\sum_i K_i A_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\omega A_i)^2$.

Individuare i modi normali è possibile. La frequenza di questi è
$\boxed{\sqrt{\frac{\sum_i K_i A_i^2}{\sum_i m_i A_i^2}}}$ -> dobbiamo determinare A_i
Prendendo degli A_i a caso, quello che otteniamo è sent'altro una frequenza $\omega \geq \omega_0$ vera di oscillazione

L'unica soluzione "giusta" ha ω_0 più piccolo possibile $\Rightarrow$ La soluzione giusta presenta $\frac{\partial \omega_0}{\partial A_i} = 0$. Il fatto di trovarci vicino al minimo assicura poi che sbagliare A_i di poco si traduce in un errore trascurabile negli ω_0. Possiamo in questo modo stimare il limite inferiore degli autovalori (che per un sistema ad N g.d.l. saranno N).

Oscillatori di taglio

Siamo ora interessati a sollecitazioni diverse da quella longitudinale. Se indichiamo con a la lunghezza di riposo, con l la distanza tra i due estremi della molla, avremo:



$$\boxed{F_y = -2k\left[\sqrt{x_0^2+y^2} - a^2\right] \operatorname{sen}\theta}$$

Riscrivendo $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x_0^2+y^2}} \Rightarrow \boxed{F_y = -2ky\left(1 - \frac{a}{\sqrt{x_0^2+y^2}}\right)}$

Pertanto l'equazione è non lineare. Per piccoli spostamenti verticali:

$y \ll x_0$: $F_y \simeq -2ky\left(1 - \frac{a}{\sqrt{x_0^2+y^2}}\right) = -2ky\left(1 - \frac{1}{\frac{x_0}{a}\sqrt{1+\frac{y^2}{x_0^2}}}\right)$

$\hookrightarrow F_y \simeq -2ky\left(1 - \frac{a}{x_0}\right) - ka\frac{y^3}{x_0^3}$,

Questo perché: $= -2ky$

Se la molla è tesa, avremo $x_0 \gg a \Rightarrow$ trascuriamo tutti i rapporti e torniamo al caso lineare, mentre se non vale quest'approssimazione l'equazione è non lineare. $\Rightarrow$ Non vale più principio di sovrapposizione.

Nel caso N.L., quindi, è tutto un gran pasticcio.

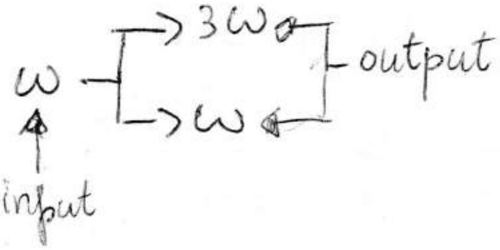
Possiamo scrivere allora:

$\boxed{m\ddot{x} = -kx - bx^3 + f\cos(\omega t)}$ Se $bx^3 \ll kx$, la non linearità è piccola, quindi possiamo pensare che la soluzione non è troppo diversa dalla soluzione lineare $x^{(0)} = A\cos\omega t$.

Questa $x^{(0)}$ non è la soluzione, ma inserendola nell'equazione del moto possiamo trovare un'approssimazione migliore ⓕ

$$\boxed{m\ddot{x} = -kA\cos\omega t - bA^3\cos^3\omega t + F\cos\omega t}$$

Dato che $\cos^3\omega t = \frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t$ compaiono anche frequenze diverse dalla forzante!



La $x^{(1)}(t)$ sarà quindi:

$$x^{(1)}(t) = [-]\cos\omega t + [-]\cos 3\omega t$$

La A ricavata nella $x^{(0)}$ inoltre, dovrà essere: $A(\omega) = \sqrt{\frac{4m}{3b}\left(\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{F}{mA}\right)}$

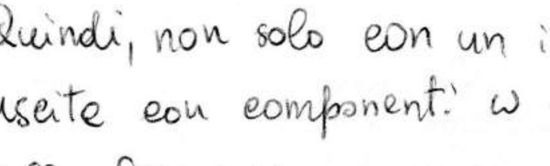
$\hookrightarrow A(\omega) \to$ eq. di consistenza

Quindi, non solo con un ingresso a frequenza ω troviamo una uscita con componenti ω e 3ω, ma anche un'ampiezza che è funzione della frequenza.

Il moto trasversale delle molle è quindi N.L., con le due caratteristiche descritte sopra.

Ovviamente, se la correzione è piccola, siamo in regime di quasi linearità.

Catena di molle



Abbiamo una serie di molle con lo stesso k, stessa l_0, e con la stessa massa agli estremi.

Mettiamo in oscillazione la prima massa m, ed ipotizziamo una propagazione della perturbazione $\Rightarrow$ dopo un tempo t, inizia a muoversi anche la seconda massa. Nel tempo t, la lunghezza della molla varia da l_0 a $l = l_0 - vt$, mentre la terza massa si muoverà dopo un altro t. Possiamo quindi indicare con $\boxed{c = \frac{l_0}{t}}$ la velocità di propagazione $\Rightarrow T(n) = nt$

Da cui anche l'impulso trasferito al tempo $T(n)$ $\boxed{FT(n) = k(l_0 - l)T = \frac{kvT}{c}}$

Possiamo utilizzare il teorema delle forze vive per ricavare una ulteriore relazione:

$$KvT\frac{l_0}{c} = \frac{1}{2}nv^2m \Rightarrow c = l_0\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Sappiamo che tante molle assieme si comportano come una singola molla con costante $\frac{1}{k} = \sum_i \frac{1}{k_i} \Rightarrow$ definendo $\frac{1}{R} = k$ possiamo ottenere la "densità degli inversi di k": $\frac{R_{TOT}}{l_{TOT}} = \frac{R}{l_0} = \frac{1}{kl_0} = \xi_e$

Pertanto: $\boxed{c = \sqrt{\frac{kl_0}{m/l_0}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_e \xi_e}}}$ cioè la velocità di propagazione è collegata alle densità di materia ed "elasticità".

Da un conto più preciso ricaveremo un'altra relazione. Più in dettaglio, chiamiamo f_{n+1} la forza che viene ~~generata~~ esercitata dalla massa $n+1$:

$$\begin{cases} f_{n+1} = k(x_n - x_{n-1}) \\ m\ddot{x}_n = f_n - f_{n+1} \end{cases} \xrightarrow{p_n = m\dot{x}_n} \begin{cases} \frac{dp_n}{dt} = f_n - f_{n-1} \\ \frac{df_{n+1}}{dt} = \frac{\omega_0^2}{4}(p_n - p_{n+1}) \end{cases}$$

dove $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{K}{m}}$

Analizziamo soluzioni armoniche: $x(t) = Ae^{i\omega t}$, riscrivendo quindi il sistema:

$$\boxed{\begin{cases} f_{n+1} = f_n - i\omega p_n \\ p_{n+1} = p_n\left(1 - \frac{4\omega^2}{\omega_0^2}\right) - \frac{4i\omega}{\omega_0^2} f_n \end{cases}}$$

Inoltre, abbiamo imposto all'inizio che c'è un tempo di propagazione τ da una massa alla successiva. Il fatto che $p_{n+1}(t) = p_n(t \mp \tau)$ vuol dire:

$\boxed{p_{n+1}(t) = p_n e^{-i\omega t} = p_n \alpha}$ meno $\Rightarrow$ sfasamento.

Con queste ipotesi, dovremmo avere:

La condizione su α si traduce in:

$$\boxed{\alpha^2 - \left(2 - 4\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \pm i\sqrt{1 - \left(1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}}$$

$\omega < \omega_0$

$\alpha \sim \cos\omega t \pm i \operatorname{sen}\omega t$

$$c = \frac{l_0}{\tau} = \frac{l_0}{2\arcsen\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

- $\omega \ll \omega_0$ $\quad c \sim \frac{l_0\omega}{2\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{l_0\omega_0}{2} = l_0\sqrt{\frac{K}{m}}$
- $\omega \sim \omega_0$ $\quad c(\omega)$
- $\omega \gg \omega_0$ non ho oscillazioni.