Esercitazione 2

ALESSANDRO DEL PIZZO

Contatti

Mail: alessandro.delpizzo@df.unipi.it

Telefono: 050 620 7948

Sito: for.unipi.it/alessandro_del_pizzo

Un altro esercizio

Una sorgente omnidirezionale è posta su un piano riflettente. Il livello di pressione Lp misurato a 7 m dalla sorgente è Lp(7m) = 56 dB – non pesati A. Calcolare il livello misurato a 20 m, il livello di potenza e la potenza acustica della sorgente.

Teoria della riverberazione

CAMPO DIFFUSO, POTENZA DIFFUSA, TEMPO DI RIVERBERO

Campo diffuso

In un ambiente chiuso, si parla di campo diffuso quando:

1. l'energia è uniformemente diffusa in tutta la stanza;
2. In ogni punto la propagazione è uniforme in ogni direzione

Intensità del campo diffuso: $I_R = \frac{c}{4} D_R$ (*R*= riverberante)

NB: nell'onda piana incidente su una superficie si aveva: $I_D = c D_D$ (*D* = diretto)

La dimostrazione formale va effettuata calcolando l'energia diffusa dalle pareti… (carico pdf sul sito)

Teoria della riverberazione

Wallace Clement Sabine: migliorare l'acustica delle aule di Harvard – fine '800.

Strumentazione utilizzata: canne d'organo, cronometro, cuscini (*materiali fonoassorbenti*) e.. Il suo orecchio!

In questo modo, Sabine riuscì a quantificare la durata della coda sonora, arrivando alla relazione sperimentale:

$T_{60} = \frac{0.161V}{A}$, dove $A = \sum \alpha_i S_i = \bar{\alpha} S$

Perché T60? La definizione moderna del tempo di riverbero è il tempo necessario al segnale per decadere di 60 dB…. Vuol dire che l'energia è calata di un fattore 10^6!

A cosa è dovuto? La coda sonora di cui parla Sabine altro non è che l'effetto delle riflessioni che, all'aumentare dell'ordine, sono via via più distanti dalla sorgente.

Formula di Sabine: dimostrazione (1)

Ipotizziamo di riempire uniformemente la stanza di energia sonora; il bilancio tra energia emessa dalla sorgente nell'intervallo di tempo dt e l'energia assorbita dalle pareti è:

$$d(DV) = W dt - \frac{Dc}{4} A dt \quad (1)$$

D = densità di energia, V = volume, W = potenza della sorgente, $A = \bar{\alpha}_{medio} S$.

L'equazione (1) può essere scritta nella forma:

$$\frac{dD}{dt} + \frac{cA}{4V} D = \frac{W}{V} \quad (2)$$

Con la condizione di *sorgente spenta al tempo zero* e *stazionarietà asintotica*, otteniamo una (già nota…) equazione differenziale

Formula di Sabine: dimostrazione (2)

$$\begin{cases} \frac{dD}{dt} + \frac{cA}{4V} D = \frac{W}{V} \\ D(0) = 0 \\ \lim_{t\to\infty} \frac{dD}{dt} = 0 \end{cases}$$

Che ha come soluzione: $D(t) = \frac{4W}{cA}\left(1 - e^{-\frac{cAt}{4V}}\right)$

La soluzione quindi presenta un asintoto orizzontale, in cui: $\lim_{t\to\infty} D(t) = D_{st} = \frac{4W}{cA}$.

Formula di Sabine: dimostrazione (3)

Metodo della sorgente interrotta: dopo un tempo t, interrompiamo la sorgente: l'equazione differenziale (2) diventa un'equazione omogenea, con soluzione data da: $D(t) = D_{st}e^{-\frac{cAt}{4V}}$

(la condizione iniziale è data da $D(0) = D_{st}$)

Passando al logaritmo: $10\log\frac{D}{D_{st}} = -\frac{cAt}{4V}10\log e = -kt$ con $k = 10\log e^{\frac{cA}{4V}}$

Il T60 è definito da: $10\log D/D_{st} = -60 = -kT_{60}$ da cui:

$T_{60} = 60 \cdot \frac{4V}{10cA\log e} = \frac{55.36}{c}\frac{V}{A} \approx \frac{0.161V}{A}$ se la temperatura è tra 10 e 30 °C.

Critiche alla formula di Sabine

1. Un ambiente perfettamente assorbente ha coefficiente d'assorbimento $\alpha = 1$. Usando la formula di Sabine, otteniamo $T_{60} = \frac{0.161V}{S}$, ma il tempo di riverbero, causato dalle riflessioni delle onde sonore sulle pareti, dovrebbe essere nullo!
2. Assorbimento dell'aria?
3. Ipotesi di campo diffuso: dimensioni caratteristiche della stanza non troppo diverse tra loro, sorgente posta lontana dalle pareti. In pratica, le onde appartenenti allo stesso ordine di riflessione devono aver percorso più o meno la stessa distanza

Formula di Eyring: dimostrazione (1)

Supera la limitazione 1. della formula di Sabine. Il modello prende in considerazione la sorgente, di potenza W, e sorgenti immagine che simulano la riflessione dalle pareti. All'ordine n-esimo di riflessione è associata una potenza $W(1-\alpha)^n$.

Se λ è il libero cammino medio di un raggio sonoro, il tempo medio tra due riflessioni è $\frac{\lambda}{c}$.

La densità di energia all'ennesima riflessione sarà data dal contributo della potenza emessa dalla sorgente nel tempo $\frac{\lambda}{c}$ e la potenza emessa dalle pareti fino a quel momento:

$$D_n = \frac{1}{V}\left[\frac{\lambda}{c}W + \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{c}W(1-\alpha)^i\right] = \frac{\lambda W}{cV\alpha}\left[1-(1-\alpha)^n\right]$$

Dove si è usato $\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1-x^k}{1-x}$. Dato che $1-\alpha<1$, $D_n \rightarrow \frac{\lambda W}{cV\alpha}$

Formula di Eyring: dimostrazione (2)

All’equilibrio, la densità di energia asintotica calcolata dev’essere uguale a quella fornita dall’espressione di Sabine, per cui: $\frac{\lambda W}{cV\alpha} = \frac{4W}{cS\alpha} \rightarrow \lambda = \frac{4V}{S}$.

L’ennesima riflessione avviene al tempo dato dalla relazione: $n\lambda = ct_n$, per cui: $n = \frac{ct_n}{\lambda} = \frac{cS}{4V} t_n$

Possiamo quindi scrivere la densità di energia all’ennesima riflessione come:

$$D_n = \frac{\lambda W}{cV\alpha}[1 - (1-\alpha)^n] = D_0[1 - (1-\alpha)^{\frac{cS}{4V}t_n}]$$

Agendo come prima, interrompiamo la sorgente. La densità di energia risultante, approssimando tn ad una funzione continua, è:

$$D(t) = D_0(1-\alpha)^{\frac{cS}{4V}t} = D_0 e^{\frac{cS}{4V}\log(1-\alpha)t}$$

Formula di Eyring: dimostrazione (3)

Imponendo che $10 \log \frac{D}{D_0} = -60$, otteniamo la formula di Eyring:

$$T_{60} = -\frac{kV}{S \log(1-\alpha)}$$

Questa formula ha il comportamento desiderato: $\lim_{\alpha \to 1} T_{60} = 0$.

Inoltre, per $\alpha \ll 1$ possiamo espandere in serie il logaritmo: $\log(1-\alpha) \approx -\alpha$, ottenendo la formula di Sabine, che quindi risulta un caso limite della più generale formula di Eyring.

Non stiamo ancora tenendo in considerazione l'attenuazione dell'aria.

Formula di Eyring-Knudsen

Per tenere in considerazione l'effetto dell'aria, introduciamo un coefficiente d'assorbimento atmosferico m, tale che un'onda di intensità $I(x)$ lungo il cammino si attenui secondo una legge esponenziale:

$I(x) = I_0 e^{-mx} = I_0 e^{-mct}$. Data la proporzionalità tra l'intensità e la densità di energia, la densità di energia al tempo t calcolata secondo la formula di Eyring è:

$$D(t) = D_0 e^{\frac{cS}{4V}\log(1-\alpha)t} e^{-mct}.$$

Ragionando esattamente come per i casi precedenti, otteniamo:

$$T_{60} = \frac{kV}{-S\log(1-\alpha)+4mV}$$

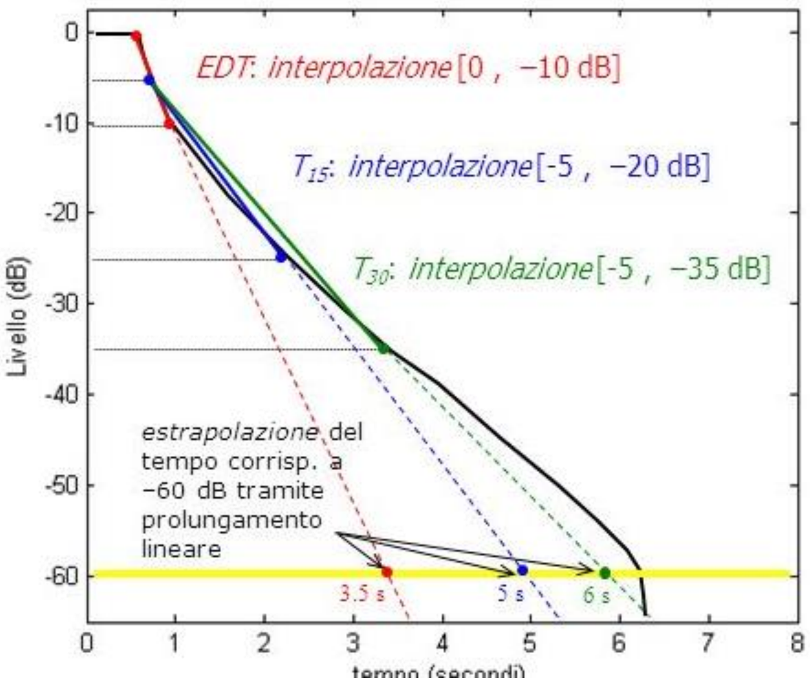
Riassunto

1. Formula di Sabine: $T_{60} = \frac{kV}{A}$
    1. Pro: facile utilizzo
    2. Contro: valida solo per coefficienti d'assorbimento piccoli

2. Formula di Eyring: $T_{60} = -\frac{kV}{S\log(1-\alpha)}$
    1. Pro: valida in generale per ogni coefficiente d'assorbimento medio delle pareti
    2. Contro: calcoli più complessi del caso precedente

3. Formula di Eyring – Knudsen: $T_{60} = \frac{kV}{-S\log(1-\alpha)+4mV}$
    1. Pro: valuta anche l'effetto dell'assorbimento dell'aria
    2. Il coefficiente d'assorbimento *m* è una funzione della frequenza, stiamo complicando i calcoli per correzioni solitamente piccole… (i valori di *m* si trovano già tabulati in dB/km)

Alcuni parametri legati al tempo di riverbero



Valori ottimali di T60 ed EDT

Per il tempo di riverbero:

- Lettura, dramma $0 < T_{60} < 1$ s
- Opera $1.2 < T_{60} < 1.8$ s
- Musica da camera $1.4 < T_{60} < 2$ s
- Sale da concerto $1.7 < T_{60} < 2.3$ s
- Chiese $2 < T_{60} < 4$ s

EDT: $1.8 < T_{10} < 2.6$ s

L'EDT è un parametro ottimale nella valutazione dell'effetto percettivo, legato alla geometria dell'ambiente e all'energia delle prime riflessioni.

Parametri legati alla prestazione acustica

Dato che il coefficiente d’assorbimento è, in generale, una funzione della frequenza, possiamo introdurre diversi tempi di riverbero. Alcuni dei principali parametri sono:

- $T_{MED} = \frac{T_{60}(500\text{ Hz})_{ott} + T_{60}(1\text{ kHz})_{ott}}{2}$
- $TB = \frac{T_{10}(2\text{ kHz})_{\text{ott}} - T_{10}(250\text{ Hz})_{\text{ott}}}{3}$
- $BR = \frac{T_{60}(125)_{ott} + T_{60}(250)_{ott}}{T_{60}(500)_{ott} + T_{60}(1000)_{ott}} = \frac{T_{60}(125)_{ott} + T_{60}(250)_{ott}}{2T_{MED}}$

Questi parametri, assieme al T_{10} ed al T_{60} sono legati a prime riflessioni e alla riverberazione.

Campi di variazione dei parametri

Nome	Espressione	Valore di riferimento
Tempo di riverberazione alle frequenze medie	$T_{MED} = \frac{T_{60}(500\ \mathrm{Hz})_{ott} + T_{60}(1\ \mathrm{kHz})_{ott}}{2}$	Orchestra sinfonica media 1.9 s, italiana 1.5 s, wagneriana 1.7 s
Equilibrio tonale (tonal balance)	$TB = \frac{T_{10}(2\ \mathrm{kHz})_{\mathrm{ott}} - T_{10}(250\ \mathrm{Hz})_{\mathrm{ott}}}{3}$	TB = 0 s
Rapporto dei bassi	$BR = \frac{T_{60}(125)_{ott} + T_{60}(250)_{ott}}{T_{60}(500)_{ott} + T_{60}(1000)_{ott}} = \frac{T_{60}(125)_{ott} + T_{60}(250)_{ott}}{2T_{MED}}$	1.2 < BR<1.25

Parametri collegati alla *nitidezza* del suono

- Definizione $D = \frac{\int_0^{50\text{ ms}} p^2(t)dt}{\int_0^{\infty} p^2(t)dt}$ (Thiele, 1953)
  - È un rapporto tra l'energia delle prime riflessioni e l'energia totale
  - Il tempo di integrazione, 50 ms, deriva da studi di percettibilità, disturbo e ritardo di una riflessione successiva all'onda diretta (Haas, 1951).
  - Valori ottimali: parlato, $D > 0.5$; musica, $D < 0.5$
- Chiarezza $C_{80} = \frac{\int_0^{80\text{ ms}} p^2(t)dt}{\int_{80\text{ ms}}^{\infty} p^2(t)dt}$ (Reichart et al., 1974)
  - Rapporto tra l'energia delle prime riflessioni e l'energia delle riflessioni successive
  - il tempo di integrazione, 80 ms, è scelto poiché la musica richiede un tempo di integrazione maggiore di quello richiesto dal parlato.
  - Esiste anche una C50, che ha un tempo di integrazione pari a 50 ms.
  - Valori ottimali: parlato, $C80 \geq 3$ dB; musica $-4 \leq C80 \leq 2$ dB

Esercizio: usare formula di Sabine

Supponendo un coefficiente di assorbimento (alpha) pari a 0.27 calcolare il tempo di riverbero in una stanza di dimensioni 6x4x3 m. Se dopo aver appeso all'interno un materiale di superficie complessiva pari a 20 mq il tempo di riverbero è sceso del 30%, qual è il coefficiente di assorbimento medio è associato al materiale?

Esercizio: curva distributiva e cumulativa

Attraverso una misura di rumore sono stati ottenuti per ogni secondo i seguenti livelli sonori in dB(A): 70, 63, 77, 85, 75, 62, 77, 69, 58, 60, 82, 76, 73, 67, 68, 77, 68, 72, 72, 73, 76, 72. Costruire la distribuzione d’ampiezza e quella cumulativa e calcolare i valori statistici L10 ed L90. Considerare una larghezza degli intervalli pari a 5 dB(A).

Svolgimento 1

Ordino in modo crescente i dati

58, 60, 62, 63, 67, 68, 68, 69, 70, 72, 72, 72, 73, 73, 75, 76, 76, 77, 77, 77, 82, 85

Calcolo le frequenze assolute f_i di ogni intervallo (conto quante volte ho ottenuto un valore in un dato intervallo)

55-60 dB(A): 2

60-65 dB(A): 2

65-70 dB(A): 5

70-75 dB(A): 6

75-80 dB(A): 5

80-85 dB(A): 2

La distribuzione d'ampiezza è costruita ponendo sull'asse x gli intervalli e sull'asse y le frequenze assolute (o relative… $f_{rel} = \frac{f_{ass}}{N}$)

Svolgimento 2

Calcolo le frequenze cumulate F_k. Per l'intervallo *k*, $F_k = \sum_{i=1}^{n} f_i$

55-60 dB(A): 2

60-65 dB(A): 2+2=4

65-70 dB(A): 4+5=9

70-75 dB(A): 9+6=15

75-80 dB(A): 15+5=20

80-85 dB(A): 20+2=22

N.B.: per l'ultima classe, $F_k = N$

La curva cumulativa è ricavata plottando sull'asse x le classi e sull'asse y la quantità $\frac{N}{100}(N - F_k)$

Svolgimento 3

L'indice statistico L10 corrisponde al livello superato nel 10% dei casi, e corrisponde quindi al 90-esimo percentile della distribuzione. Viceversa, l'indice L90 corrisponde al decimo percentile.

In generale, l'indice del *k*-esimo percentile si calcola da $I_k = (n+1) \times \frac{k}{100}$. Il valore esatto si ricava con un'interpolazione lineare tra i due dati adiancenti

Nel nostro caso:

$I_{90} = 23 \times 0.9 = 20.7$

Il valore di L10 quindi sarà quindi compreso nel intervallo:

$L_{10} = 77 + (82 - 77) \times 0.7 = 80.5$ dB(A)

Per l'L90, invece:

$I_{10} = 23 \times 0.1 = 2.3$

$L_{90} = 60 + (62 - 60) \times 0.3 = 55 + 3.5 = 60.6$ dB(A)