Esercitazione 1

ALESSANDRO DEL PIZZO

Contatti

Mail: alessandro.delpizzo@df.unipi.it

Telefono: 050 620 7948

Il suono e l’equazione delle onde

DEFINIZIONI, EQUAZIONE D’ONDA, ONDE PIANE, IMPEDENZA ACUSTICA

Definizioni

- Suono: perturbazione prodotta da una sorgente, che si propaga in un mezzo elastico provocandone una variazione locale di pressione p(x,y,z,t) e uno spostamento u(x,y,z,t) di particelle, tale da poter essere rilevata da una persona o strumento.
- La velocità di propagazione dell’onda, *c*, è diversa dalla velocità locale delle particelle.

Equazione delle onde

- La pressione totale del mezzo in cui si propaga l'onda può essere espressa come somma di due termini: $P = P_0 + p(x, y, z, t)$, dove $P_0 \approx 10^5$ Pa mentre le variazioni locali di pressione dovute alla propagazione di onde acustiche vanno dai $20\ \mu$Pa ai 10 Pa (soglia di udibilità e soglia del dolore a 1000 Hz!)
- L'equazione delle onde è il risultato di tre relazioni diverse:
  - Equazione di Newton
  - Equazione di stato dei gas perfetti
  - Conservazione della massa

Equazione di Newton

- Su un volumetto dV=dxdydz agisce un'onda di pressione p(x), monodimensionale per semplicità di calcolo.
- Al primo ordine, la forza netta che agisce sul volumetto dV è uguale a:
- $F = -\frac{\partial p}{\partial x} dxdydz$ da cui, dividendo per il volume: $\frac{F}{V} = -\frac{\partial p}{\partial x}$
- Usando la legge di Newton F=ma, otteniamo: $\frac{M}{V}\frac{dv}{dt} = \rho\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$
- Da cui: $\rho\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ (E.M.)

Equazione di stato

- Ipotesi di compressioni adiabatiche, ovvero il fenomeno è talmente rapido da non permettere scambio di calore. (Esercizio: Newton ipotizzò un andamento dettato da una legge isoterma, cosa cambia?)
- L'equazione di stato impone per processi adiabatici, per ogni coppia di valori di pressione e volume: $P_0 V_0^\gamma = (P_0 + p)(V_0 + \Delta V)^\gamma = P_0 V_0 \left(1 + \frac{p}{P_0}\right)\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^\gamma$
- Ovvero: $\left(1 + \frac{p}{P_0}\right) = \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^{-\gamma}$ che per piccole variazioni di volume diventa $\frac{p}{P_0} = -\gamma \frac{\Delta V}{V}$
- Indicando con $k = P_0 \gamma$ il modulo volumetrico di elasticità:
- $p = -k \frac{\Delta V}{V_0}$ (E.S.)

Equazione di continuità

- Equazione di conservazione della massa su un volumetto V= dxS per un'onda che incide lungo x, con fronti d'onda ortogonali all'asse x.
- Se l'onda (piana) causa uno spostamento di particelle u(x) nel punto x, lo spostamento in x+dx sarà $u(x) + \delta u = u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} dx$.
- La conseguente variazione di volume su una sezione di area S è: $\Delta V = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dxS$
- Usando E.S. otteniamo: $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial u}{\partial x}$=- $\frac{p}{k}$
- $\frac{\partial u}{\partial x}$=- $\frac{p}{k}$ (E.C.)

Equazione d'onda per la pressione sonora

Usiamo le due equazioni (E.N.) ed (E.C):

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \rho \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{p}{k} \end{cases}$$

Sostituendo la seconda relazione nella prima, otteniamo l'equazione cercata:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Ponendo $c = \sqrt{\frac{k}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}}$ otteniamo la solita forma: $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ dove c è la velocità del suono.

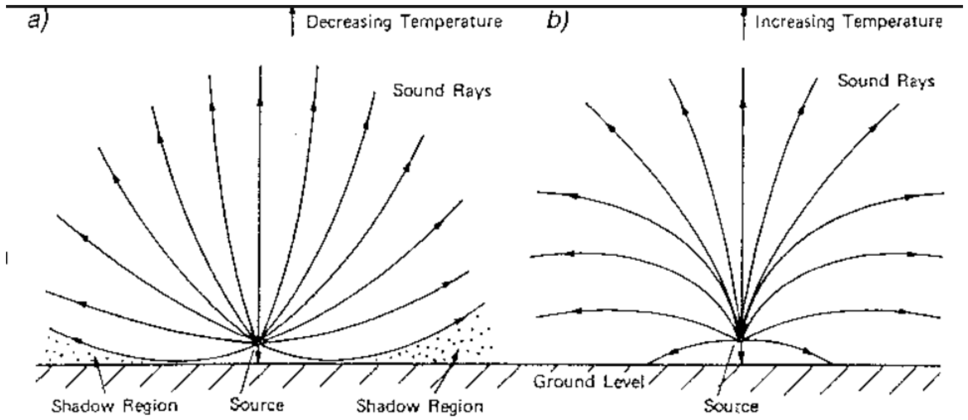
Velocità del suono

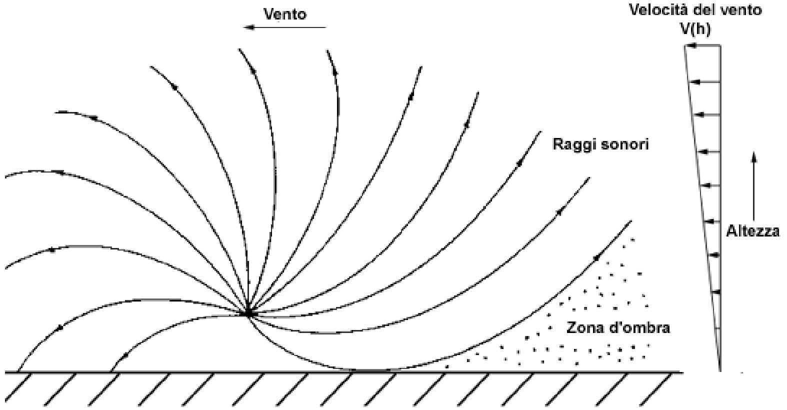
- Dalla relazione $c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}}$ possiamo ricavare l'andamento *c(T).*
- Legge dei gas perfetti: $P_0 V = \frac{M}{M_M} R T_0 \rightarrow \rho = \frac{M}{V} = \frac{P_0}{T_0}\frac{M_M}{V}$, sostituendo nella formula per c si ottiene: $c(T_0) = \sqrt{\frac{\gamma T_0}{M_M R}}$, dove il pedice 0 indica che la T è espressa in kelvin.
- Questa relazione è nota come formula di Laplace.
- In aria: $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4, M_M = 29\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}} \rightarrow c(T_0) = 20.04\sqrt{T_0}\;\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$
- Se la temperatura è espressa in °C, la formula precedente può essere approssimata: $c(\theta) = 331.2 + 0.6\theta\;\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$ dove θ è la temperatura del mezzo in gradi centigradi.

Effetto delle condizioni metereologiche

Data la dipendenza della velocità del suono dalla temperatura, ci si aspetta una rifrazione dei raggi sonori laddove sono presenti strati d'aria a temperature diverse, con conseguente curvatura dei raggi.

Anche la direzione del vento influisce sulla velocità dell'onda e va sommata (vettorialmente) alla velocità di propagazione dell'onda. Un gradiente di velocità del vento contribuisce all'incurvamento dei raggi.





Soluzioni dell’equazione delle onde

Onde piane: soluzione particolare, le grandezze variano secondo una sola coordinata spaziale.

Un’onda piana ha una forma del tipo $f\left(t-\frac{x}{c}\right)+g\left(t+\frac{x}{c}\right)$.

La *f* rappresenta un’onda progressiva, che si allontana dalla sorgente, *g* invece è un’onda regressiva.

Onda progressiva? $f\left(t_0-\frac{x_0}{c}\right)=f\left(t_1-\frac{x_1}{c}\right)\rightarrow c(t_1-t_0)=x_1-x_0$

Un tipo di onde per cui faremo molti calcoli: onda piana monocromatica

$$p=\bar{p}\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\phi\right]=\cos(\omega t-kx+\phi)$$

Onde piane

Periodo: $\omega T = 2\pi \rightarrow T = \frac{1}{f}$

Lunghezza d'onda: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f}$

Relazione tra frequenza, lunghezza d'onda e velocità dell'onda: $c = \lambda f$

A T = 23 °C, *c* = 345 m/s, per cui:

f = 100 Hz -> λ = 3.45 m;

f = 1 kHz -> λ = 0.345 m;

f = 10 kHz -> λ = 0.0345 m…

Impedenza acustica

Sappiamo che vale l'equazione $\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ dove *v* è la velocità locale delle particelle

Per un'onda monocromatica piana, per cui: $p = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$

$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{c}\, f'\left(t - \frac{x}{c}\right) \rightarrow v = \frac{1}{\rho c} f\left(t - \frac{x}{c}\right)$.

Il rapporto tra pressione e velocità locale delle particelle si chiama impedenza acustica caratteristica del mezzo:

$Z_0 = \frac{p}{v} = \rho c \approx 407 \text{ rayl}$ in aria.

Per onde qualsiasi, questo rapport sarà in generale complesso… il calcolo dell'impedenza Acustica specifica per onde sferiche (altra soluzione dell'equazione d'onda) è fatto altrove.

Caratteristiche del suono

INTENSITÀ, DENSITÀ DI ENERGIA, POTENZA

Intensità

Un campo di pressione *p* agisce su uno strato di area unitaria. Durante l'intervallo di tempo *dt*, le particelle vengono spostate della quantità *dx=vdt,* per cui il lavoro effettuato dall'onda è *L=pvdt.*

Risulta che nell'unità di tempo, l'energia trasferita all'unità di superficie (intensità dell'onda) è:

$$I = pv$$

Per un'onda monocromatica:

$$I = \bar{v}\bar{p}\cos^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \rightarrow \langle I \rangle = \frac{\bar{v}\,\bar{p}}{2} = \frac{\bar{p}^{\,2}}{2\rho c} = \frac{p_{eff}^2}{\rho c}\ \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

Densità di energia

L'energia viene trasportata a velocità *c* dall'onda. Pertanto, in 1 s, l'onda percorre una distanza uguale a *c*:

$$D = \frac{\langle I \rangle}{c} = \frac{p_{eff}^2}{\rho c^2} \; [\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}]$$

Potenza di sorgente ed intensità sonora

Pensiamo ad una sola sorgente, isotropa (omnidirezionale).

La potenza sonora emessa in tutte le direzioni deve essere uguale all'integrale della intensità su una superficie chiusa attorno alla sorgente (per comodità sferica).

$$W = \int_S I_s dS = 4\pi r^2 I_s \text{ [W]}$$

Per una sorgente omnidirezionale: $I = \frac{W}{4\pi r^2}$

Descrizione del suono

LIVELLI DI INTENSITÀ, POTENZA E PRESSIONE, PROPAGAZIONE ALL’APERTO, DIRETTIVITÀ

Livelli di intensità, potenza e pressione

Livello di intensità: $L_I = 10\log(\frac{I}{I_0})$ dove $I_0 = 10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

Livello di potenza: $L_W = 10\log\left(\frac{W}{W_0}\right)$ dove $W_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W}$

Livello di pressione: $L_P = 10\log\left(\frac{p_{eff}^2}{p_0^2}\right) = 20\log\left(\frac{p_{eff}}{p_0}\right)$ dove $p_0 = 20\ \mu\mathrm{Pa}$

Relazioni tra i livelli

Una sorgente omnidirezionale emette un suono di potenza *W.* Il livello di intensità misurato a distanza *r* dalla sorgente è:

$$10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{W}{W_0} - 10\log\frac{S}{S_0} \rightarrow L_I = L_W + 10\log\frac{1}{4\pi r^2} = L_W - 10\log 4\pi - 20\log r$$

$$L_I = L_W - 20\log r - 11$$

Dalla relazione tra pressione efficace e intensità, ricaviamo:

$$L_I = 10\log\left(\frac{p_{eff}^2}{\rho c I_0}\right) = 10\log\left(\frac{p_{eff}^2}{\rho c}\frac{p_0^2}{p_0^2}\frac{1}{I_0}\right) = 10\log\frac{p_{eff}^2}{p_0^2} + 10\log\frac{p_0^2}{I_0\rho c}$$

$\rho c = 407\ \mathrm{rayl}, p_0^2 = 20\mu Pa, I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2} \rightarrow \frac{p_0^2}{I_0\rho c} \approx 1$ (si trovano valori già tabulati…)

Pertanto, alla fine, con buona approssimazione possiamo scrivere $L_I = L_P$

Sorgente puntiforme vs lineare

Per una sorgente puntiforme omnidirezionale vale: $L_P = L_W - 20\log r - 11$

Una sorgente lineare, che emette una certa Potenza per unità di lunghezza $\sigma = \frac{W}{L}$, causerà una intensità sonora *I* a distanza *d* dalla sorgente pari a: $I = \frac{\sigma}{2\pi r}$ (l'integrale va fatto su una circonferenza invece che su una sfera…)

I livelli per unità di lunghezza, di conseguenza, variano con la legge:

$L_P = L_W - 10\log 2\pi - 10\log r = L_W - 8 - 10\log r$

Quindi: il livello di pressione di una sorgente puntiforme cala di 6 dB al raddoppio della distanza, quello di una sorgente lineare di 3 dB.

Somma di livelli

Solitamente, si misura il suono proveniente da due o più sorgenti.

Immaginiamo di avere due sorgenti A e B che producono una pressione PA e PB nel punto di ricezione.

Si dimostra che $P_{tot}^2 = P_A^2 + P_B^2$ se le sorgenti sono scorrelate (termine di interferenza nullo..)

Sapendo che $\mathrm{L_P} = 10\log(\frac{P^2}{P_0^2})$ ricaviamo che

$10^{L_{P_{tot}}/10} = (10^{\frac{L_{P_A}}{10}} + 10^{\frac{L_{P_B}}{10}})$ da cui:

$L_{P_{tot}} = 10\log(10^{\frac{L_{P_A}}{10}} + 10^{\frac{L_{P_B}}{10}})$

Esempio: due sorgenti uguali

$$L_{P_{tot}} = 10\log(10^{\frac{L_{P_A}}{10}} + 10^{\frac{L_{P_A}}{10}}) = 10\log\left(2\cdot 10^{\frac{L_{P_A}}{10}}\right) =$$

$$10\log 2 + 10\log(10^{\frac{L_{P_A}}{10}})$$

Usando le proprietà dei logaritmi:

$$L_{P_{tot}} = 10\log 2 + L_{P_A} = 3\ \mathrm{dB} + L_{P_A}$$

Il raddoppio della pressione sonora conduce ad un aumento di 3 dB del livello di pressione!

Esempio

Fattore ed indice di direttività

Non tutte le sorgenti sono omnidirezionali!

Per tenere conto di ciò, si definisce il fattore di direttività come il rapporto tra intensità a distanza *r* in una direzione (ovvero ad angoli θ e ϕ fissati) e l'intensità sonora di una sorgente omnidirezionale con stessa potenza della sorgente $Q_{\theta,\phi} = \frac{\langle I_{\theta,\phi} \rangle}{I} = \frac{p_{eff}^2}{\rho c} \frac{4\pi r^2}{W}$

$DI_{\theta,\phi} = 10 \log Q_{\theta,\phi}$

Omettendo gli indici, la pressione efficace a distanza *r* dalla sorgente si esprime come:

$p_{eff}^2 = \frac{\rho c Q W}{4\pi r^2} \rightarrow L_P = L_W + DI - 20 \log r - 11$ (sorgenti puntiformi)

Per sorgenti lineari: $L_P = L_W + DI - 10 \log r - 8$

Per massimizzare il livello, dove conviene mettere gli altoparlanti?

Campo libero

Il suono generato da una sorgente si propaga in un mezzo illimitato. È una idealizzazione ben verificata in:

A) spazi aperti, con condizioni atmosferiche omogenee e stabili

B) camera anecoica

Il campo libero si suddivide poi in:

A) campo vicino: complicato, in cui non è facile stabilire una relazione tra livello e distanza

B) campo lontano: il livello assume un andamento lineare, -6 dB a raddoppio della distanza (per sorgenti puntiformi)

La condizione di campo lontano, per una sorgente di lunghezza *l* che emette a lunghezza d'onda λ si verifica quando: $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}, r \gg l, r \gg \frac{\pi l^2}{2\lambda}$.

Esercizi

SORGENTE OMNIDIREZIONALE E SORGENTE LINEARE

Esercizio 1

Una sorgente omnidirezionale S è posta su una parete riflettente ad altezza $h_s = 10$ m dal suolo. Lo spettro di emissione della sorgente, in bande di ottave, è dato in tabella. Nell'ipotesi di suolo completamente riflettente, calcolare il livello di pressione misurato al ricettore R ad altezza $h_R = 40$ m e distante L = 40 m dalla sorgente.

Freq. (Hz)	**125**	**250**	**500**	**1000**	**2000**	**4000**	**8000**
L_W	91	93	93	75	80	86	79
Pond. A	-16	-9	-3	0	1	1	-1
	75	84	90	75	81	87	78

Tecnicamente, la ponderazione A va effettuata sui livelli di pressione… però così facilita i conti!

Esercizio 2

Un’autostrada è percorsa da una fila uniforme di soli autocarri (sorgente lineare). Calcolare il livello sonoro in un ipotetico centro residenziale a 50 m di distanza dall’autostrada, sapendo che $L_W = 100$ dB – di un autocarro

V = 80 km/h velocità media di un autocarro in transito

numero di autocarri/ora n= 1000 veicoli/hr